第七章 电路的时域分析

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | https://sslic.cn

《电路》第六版，邱关源 原著，罗先觉 主编

本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. 一阶电路的全响应

5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

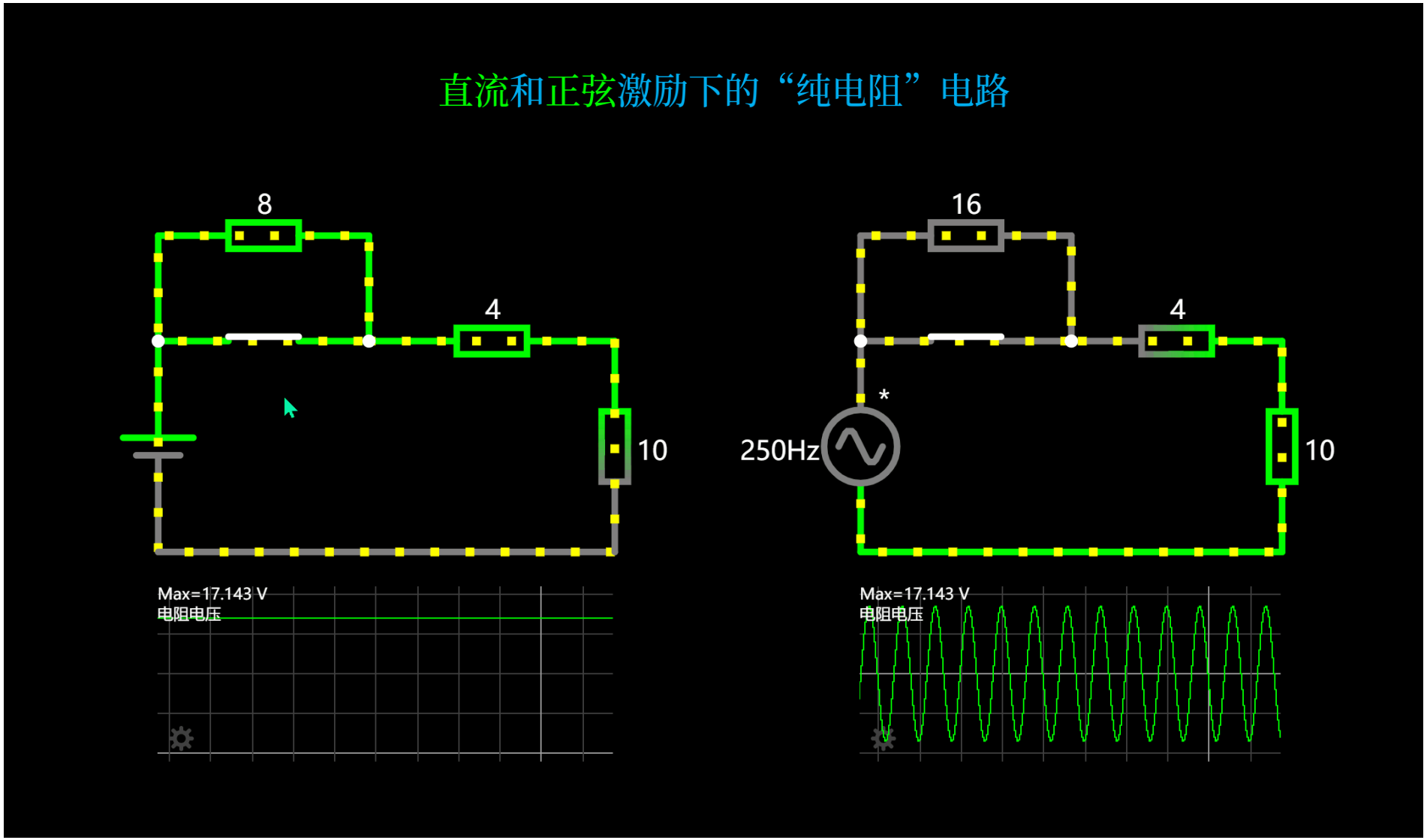
7. 二阶电路响应的初步分析*

本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件
2. 一阶电路的零输入响应
3. 一阶电路的零状态响应
4. 一阶电路的全响应
5. 一阶电路的阶跃响应
6. 一阶电路的冲激响应
7. 二阶电路响应的初步分析*

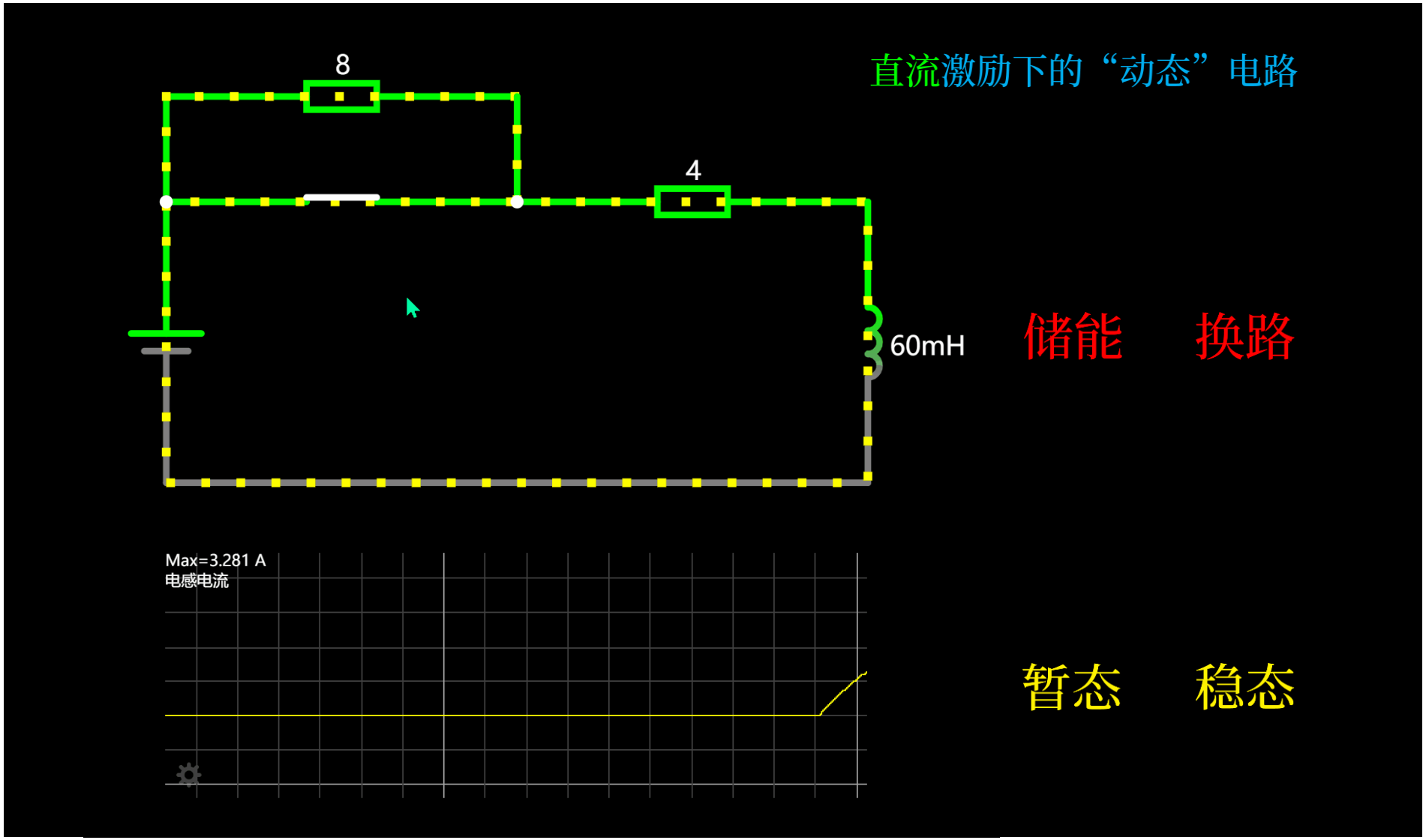
7-1 动态电路的方程及其初始条件

- 纯电阻电路
  - 无储能元件
  - 仅代数方程
  - 信号可跃变



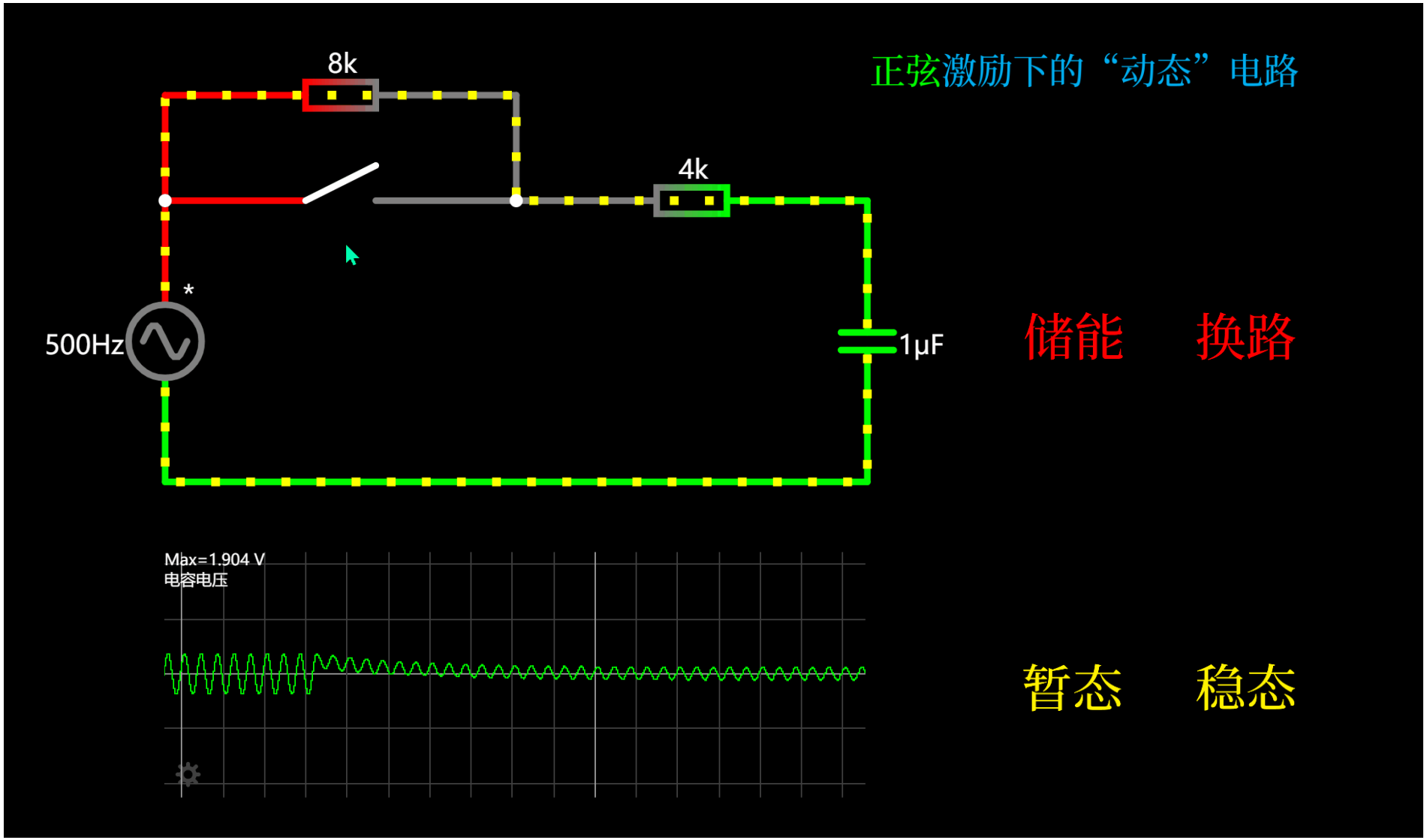
7-1 动态电路的方程及其初始条件

- 动态电路
  - 有储能元件
  - 需微分方程
  - 储能不跃变



7-1 动态电路的方程及其初始条件

- 动态电路
  - 有储能元件
  - 需微分方程
  - 储能不跃变



7-1 动态电路的方程及其初始条件

■ 动态电路的状态

▶ 稳态

- 电流和电压均为常量或周期量的工作状态
- 任何电路经过足够长的时间后，都会达到稳态

▶ 暂态

- 电路响应从一种稳态转变为另一种稳态的过程，也称为过渡过程
- 产生的原因：动态电路中，电路结构或元件参数突变，储能元件储存和释放能量需要一定的时间

$p = \frac{dw}{dt}$　　$dt \to 0 \Rightarrow p \to \infty$

■ 电容、电感的储能

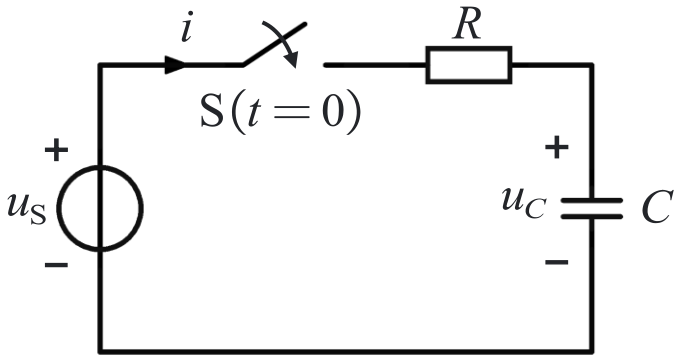
$$W_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 \qquad W_L = \frac{1}{2}Li_L^2$$

▶ 探讨：本质上是哪些物理量不能跃变？

7-1 动态电路的方程及其初始条件

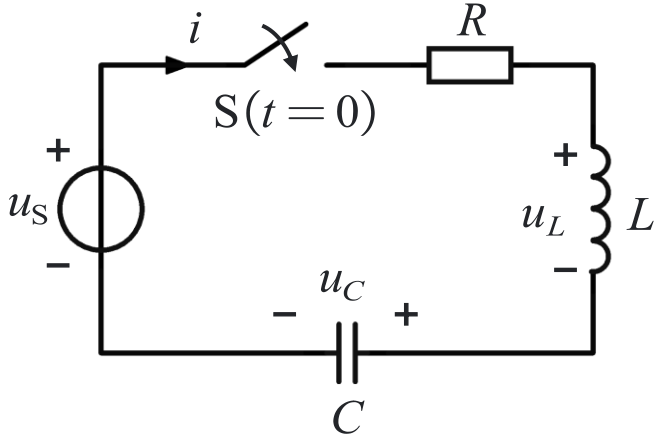
■ 动态电路的方程

▸ 根据 KCL、KVL、动态元件的 VCR 建立描述电路的线性常微分方程



$Ri + u_c = u_s$

$i = C\frac{du_c}{dt}$



$Ri + u_L + u_c = u_s$

$i = C\frac{du_c}{dt}$ $u_L = L\frac{di}{dt}$

一阶电路 $RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S$

如何求解？

要何条件？

$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S$ 二阶电路

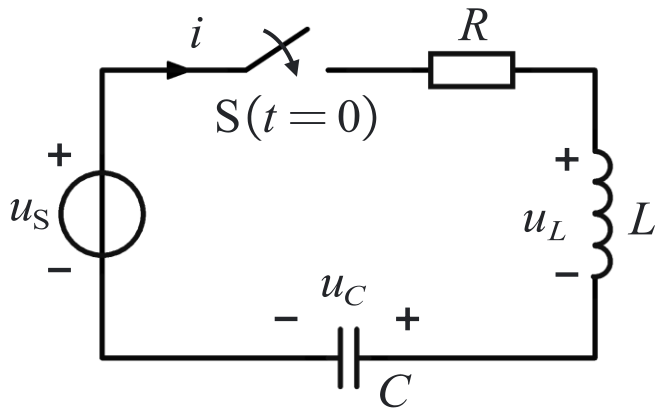
7-1 动态电路的方程及其初始条件

■ 动态电路的求解通法

▶ 经典法求解电路微分方程

- 什么是换路？ 电路结构或参数变化
- 微分方程系数由什么决定？ 网络结构与元件参数
- 微分方程的解 = ？ 通解 + 特解
- 特解与什么有关？ 激励（非齐次项）
- 通解与什么有关？ 初值（电容电压、电感电流）

$u_C(0_+)$　　$i_L(0_+)$



$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S$$

▶ 探讨：

- 为什么选电容电压（串联）和电感电流（并联）作为微分方程变量？
- 它们在换路发生后的初值是否可以确定？如何确定？

7-1 动态电路的方程及其初始条件

■ 动态电路的初值确定

▶ 换路定则（不含冲激的电路）

$u_C(0_+)=u_C(0_-)$　　$q=Cu \Rightarrow q(0_+)=q(0_-)$

$i_L(0_+)=i_L(0_-)$　　$\psi=Li \Rightarrow \psi(0_+)=\psi(0_-)$

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\underbrace{\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi}_{\text{有限值}=0}$$

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\underbrace{\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi)\mathrm{d}\xi}_{\text{有限值}=0}$$

▶ 物理意义

- 电容上的电压和电荷不发生跃变

  ——电荷守恒

- 电感上的电流和磁通链不发生跃变

  ——磁通链守恒

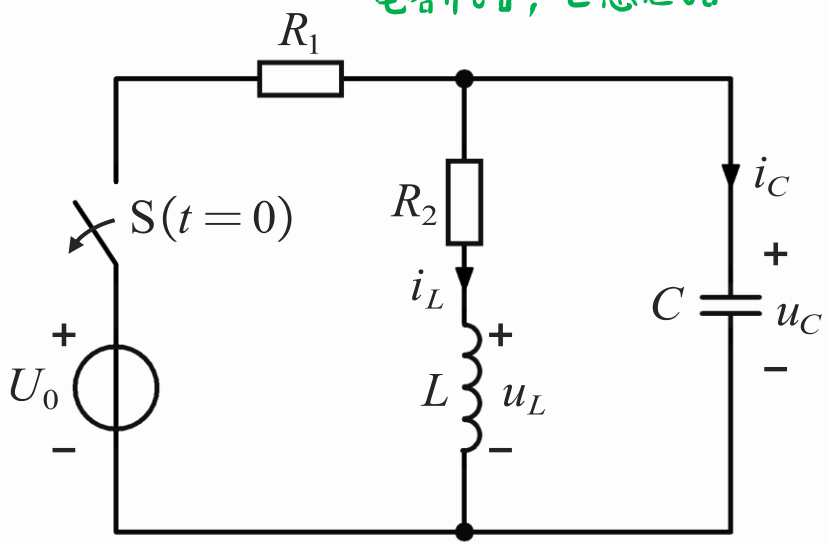
▶ 其他电压和电流的初值如何确定？

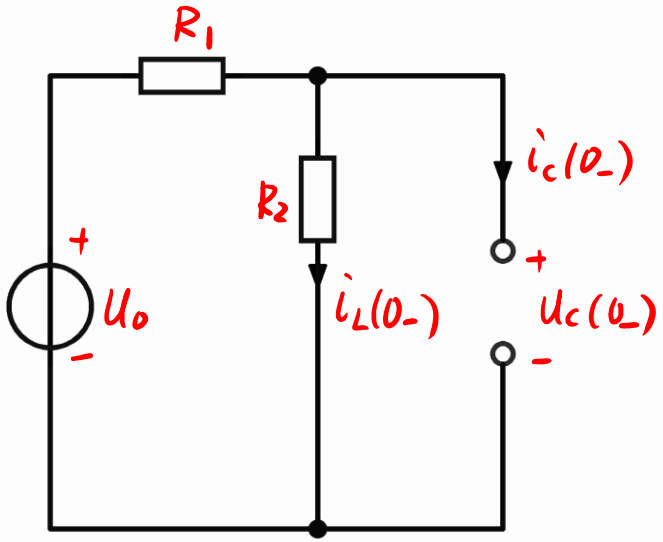
$u_C(0_+)$ 用等值电压源替代，$i_L(0_+)$ 用等值电流源替代

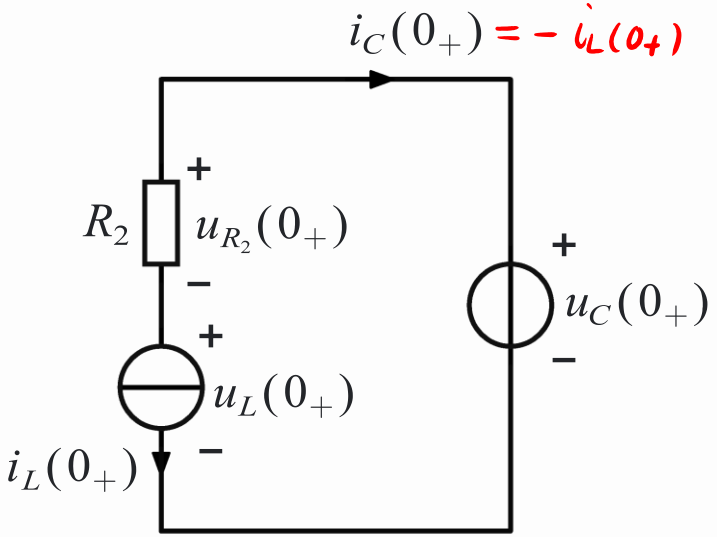
7-1 动态电路的方程及其初始条件

例：当图示电路达到稳态时打开开关S，试求$u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$、$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$和$u_{R_2}(0_+)$。

电容开路，电感短路







根据换路前等效电路

$$i_L(0_-) = \frac{U_0}{R_1+R_2}$$

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_0$$

根据换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_0$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_0}{R_1+R_2}$$

根据换路后等效电路

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = \frac{1}{C}i_C(0_+) = -\frac{1}{C}i_L(0_+) = -\frac{U_0}{C(R_1+R_2)}$$

$$u_{R_2}(0_+) = R_2 i_L(0_+) = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = u_C(0_+) - u_{R_2}(0_+) = 0$$

本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. 一阶电路的全响应

5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

7. 二阶电路响应的初步分析*

7-2 一阶电路的零输入响应

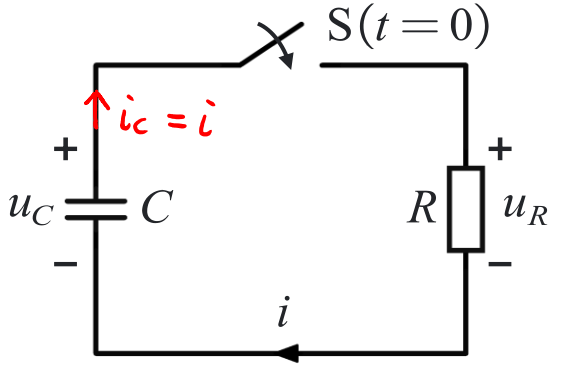
- 什么是零输入响应？
  - 无外部激励，仅由初始储能引起的响应

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 其中，$\tau=RC$ 称为时间常数

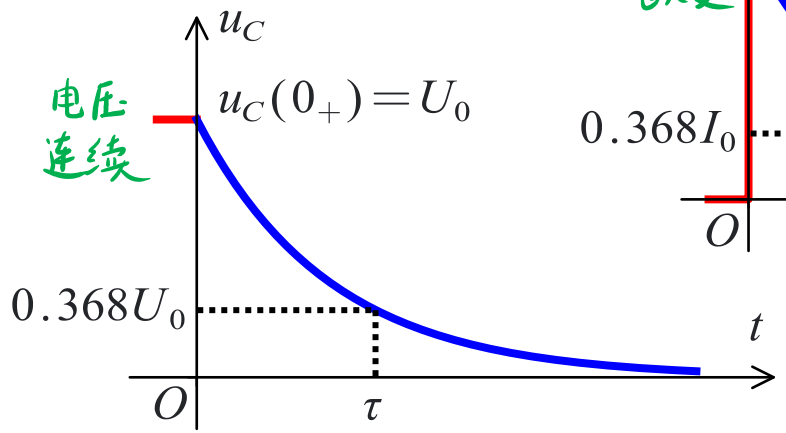
$$i_C(t)=\frac{u_C(0_+)}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

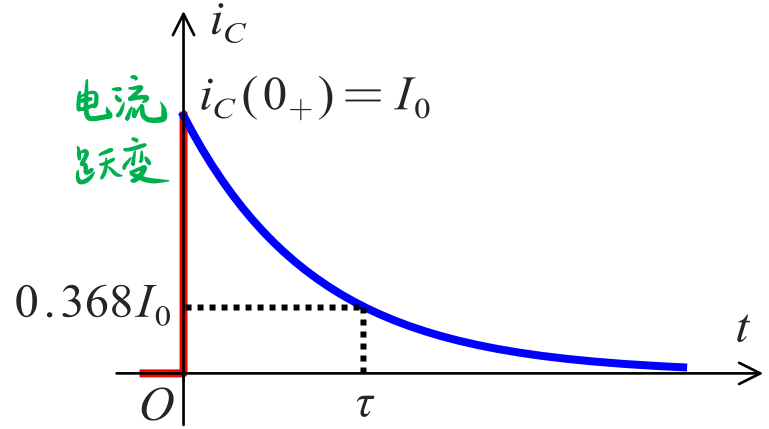
利电容VCR公式 $i_C(t)=-C\frac{du_C}{dt}$（非关联参考方向）



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

  - 关于时间常数
    - 量纲为 s
    - 时间常数越大，过渡时间越长
    - 若电阻 R 很小，电容产生瞬间大电流



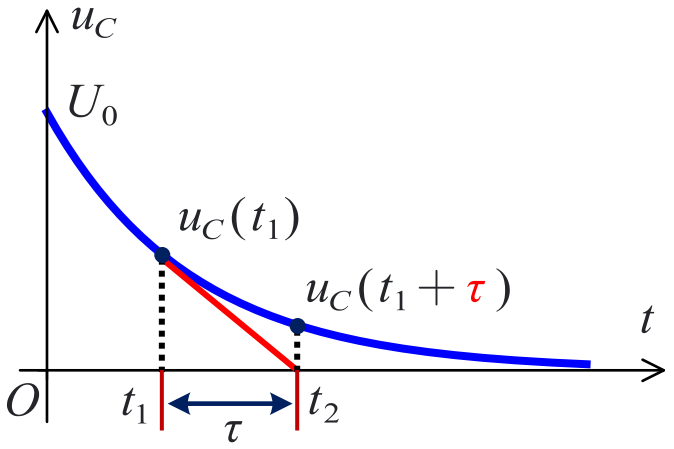


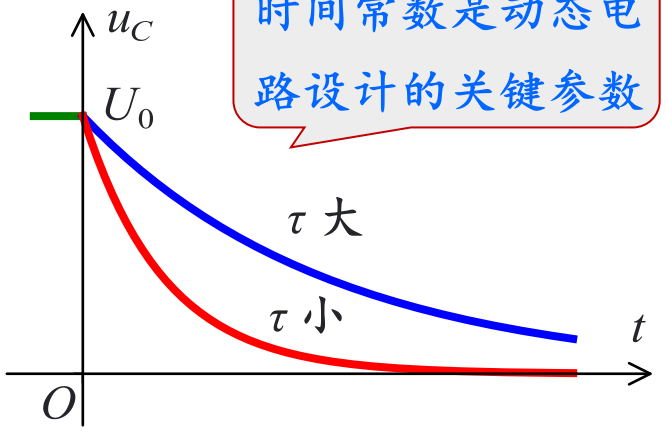
7-2 一阶电路的零输入响应

■ 时间常数的意义

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	$\cdots$	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.050U_0$	$0.018U_0$	$0.006U_0$	$\cdots$	0

- 每经过一个时间常数，零输入响应变为原来的 $e^{-1}=36.8\%$，或衰减了 $1-e^{-1}=63.2\%$
- 工程上一般认为，换路后，经过 3~5 个时间常数，过渡过程结束
- 几何意义
  - 响应曲线上任意一点，如果以该点斜率为固定变化率衰减，经过一个时间常数后，值变为零





时间常数是动态电路设计的关键参数

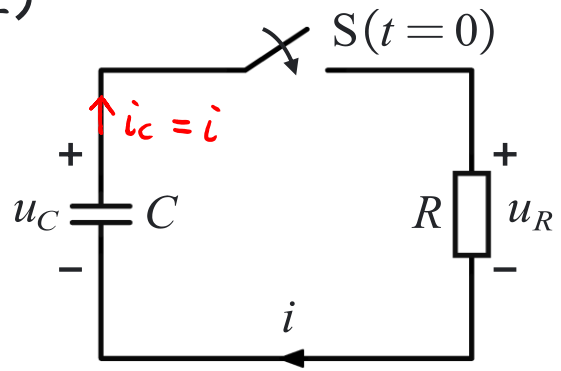
- 电容放电的能量
  - 全部由电阻消耗（在复杂电路中，R 通常为等效电阻）

$$W_R = \int_0^\infty i^2 R \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)^2 R \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}t}\,\mathrm{d}t$$

$$W_R = \frac{1}{2}CU_0^2$$



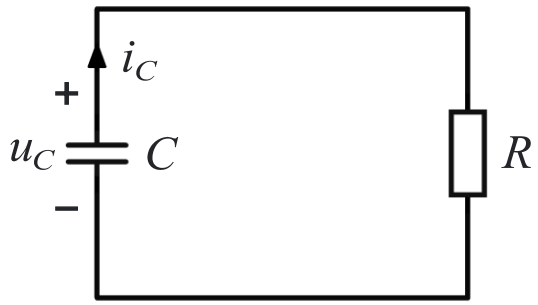
$$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C(t) = \frac{u_C(0_+)}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

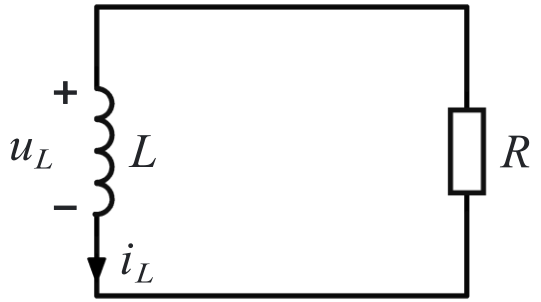
7-2 一阶电路的零输入响应

■ 零输入响应小结（*RC* vs *RL*）

思考：写出零输入响应需要哪些要素？



$\tau = RC$



$\tau = \dfrac{L}{R}$

$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

- 与 u_C 方向无关

$i_C(t) = \dfrac{u_C(0_+)}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

- 正负看关联与否
- 用电容 VCR 公式

$W_R = \dfrac{1}{2}Cu_C^2(0_+)$

- 与 u_C 方向无关

$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

- 与 i_L 方向无关

$u_L(t) = -Ri_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

- 正负看关联与否
- 用电感 VCR 公式

$W_R = \dfrac{1}{2}Li_L^2(0_+)$

- 与 i_L 方向无关

7-2 一阶电路的零输入响应

例：已知$U_S=15\text{V}$，$R_1=3\Omega$，$R_2=1\Omega$，$R_3=3\Omega$，$R_4=4\Omega$，$C=0.01\text{F}$。开关断开前电路已处于稳态，求$t=0$时开关断开以后的电容电压u_C。

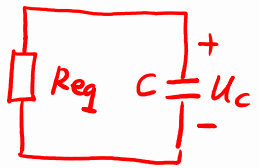
开关断开前处于稳态，电容相当于开路

$$u_C(0_-)=\frac{R_4}{R_2+R_4}U_S=12\text{V}$$

根据换路定则

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=12\text{V}$$

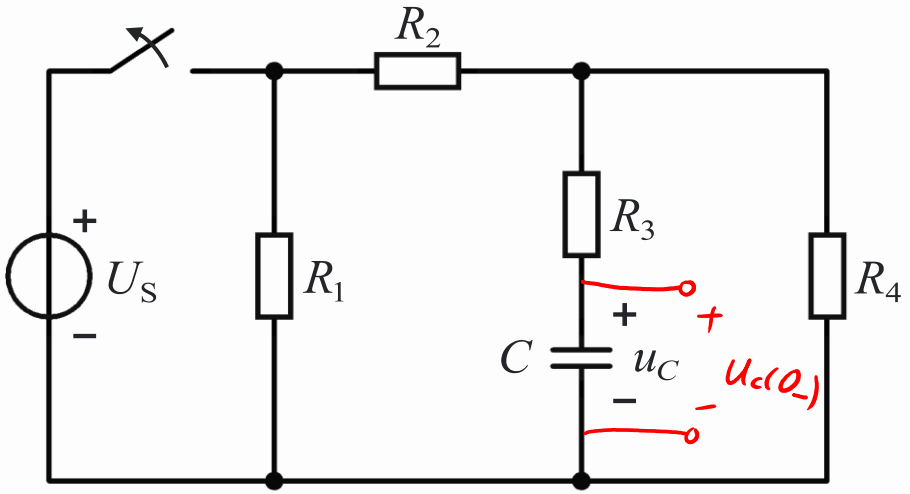
开关断开后的等效电路为R_{eq}与C串联



其中 $R_{eq}=(R_1+R_2)/\!/R_4+R_3=5\Omega$

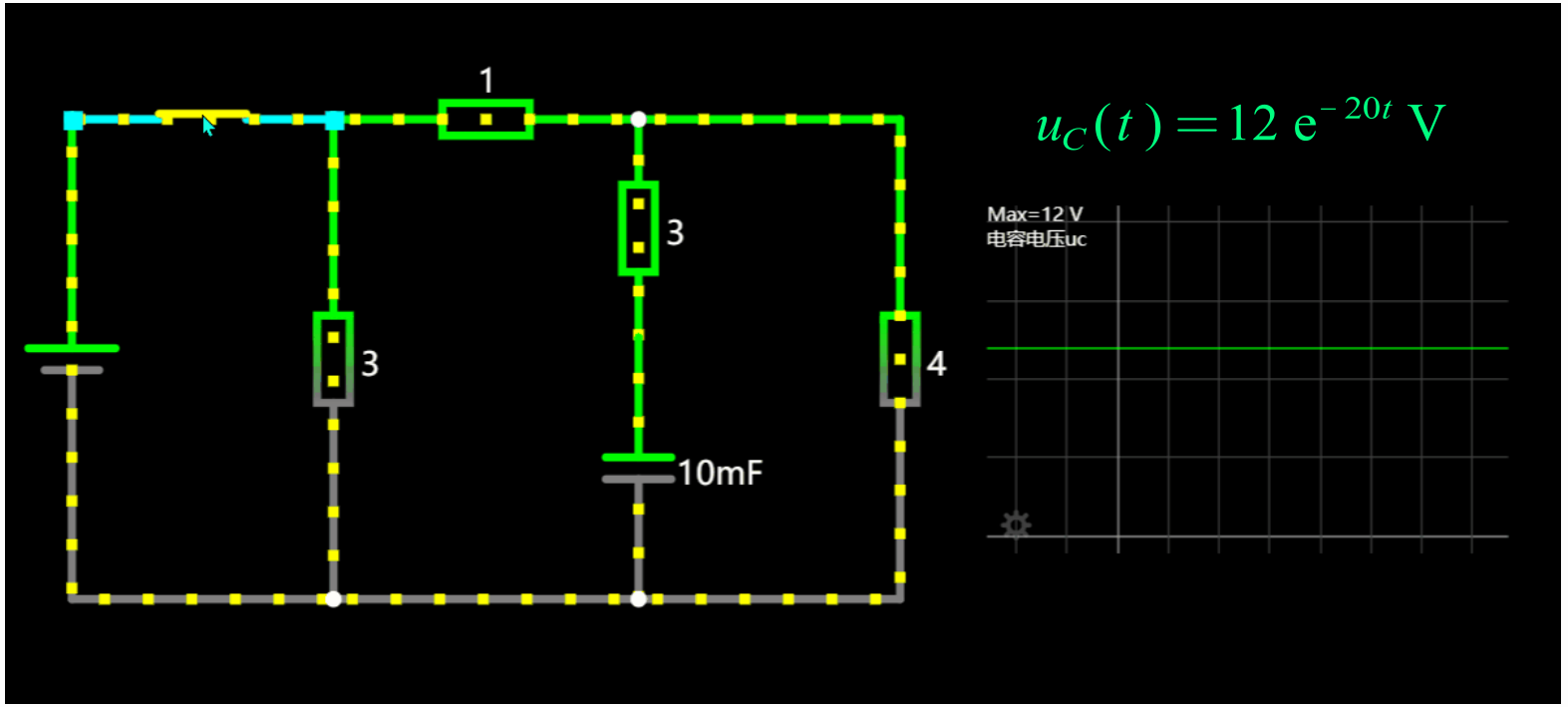
时间常数 $\tau=R_{eq}\cdot C=0.05\text{s}$

故 $u_C(t)=u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=12e^{-20t}\quad(t\geq 0)$



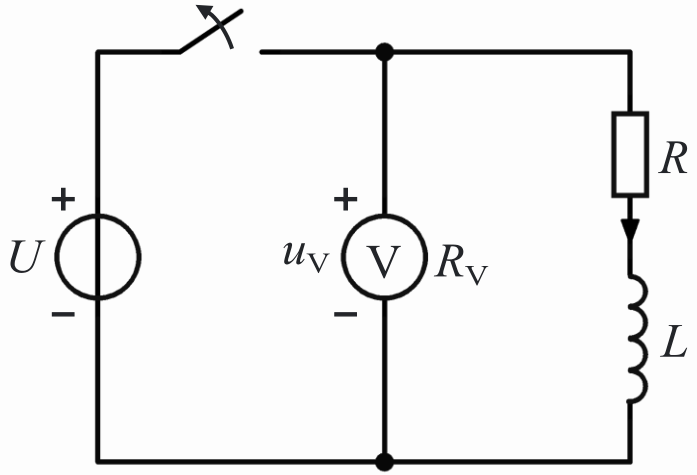
7-2 一阶电路的零输入响应

例：已知$U_S=15\text{V}$，$R_1=3\Omega$，$R_2=1\Omega$，$R_3=3\Omega$，$R_4=4\Omega$，$C=0.01\text{F}$。开关断开前电路已处于稳态，求$t=0$时开关断开以后的电容电压u_C。



7-2 一阶电路的零输入响应

例：图示电路中，R、L 分别表示电磁铁线圈的电阻和电感，已知 $R=4\Omega$，$L=2\mathrm{H}$，$U=220\mathrm{V}$。电压表的量程为 300V，内阻 $R_\mathrm{V}=30\mathrm{k}\Omega$。开关未断开时电路中电流已恒定不变。在 $t=0$ 时断开开关，试求开关断开后电压表处的电压 u_V，并给出刚断开时的电压 $u_\mathrm{V}(0_+)$。



开关断开前处于稳态，电感相当于短路

$$i_L(0_-)=\frac{U}{R}=55\,\mathrm{A}$$

开关断开后，由换路定则

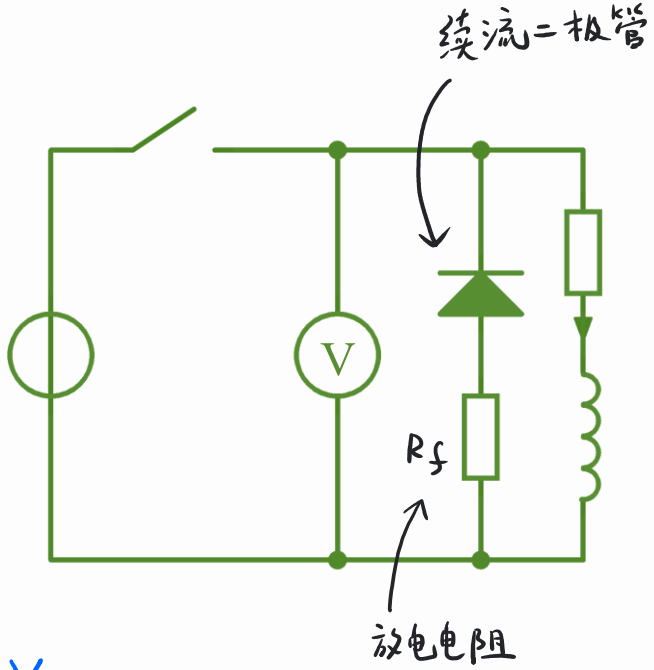
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=55\,\mathrm{A}$$

时间常数 $\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{L}{R+R_V}\approx\frac{1}{15\times10^3}\,\mathrm{s}$

故 $i_L(t)=i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=55e^{-15\times10^3 t}\,\mathrm{V}$

$$u_V(t)=-R_V i_L(t)=-1650\times10^3 e^{-15\times10^3 t}\,\mathrm{V}$$

$u_V(0_+)=-1650\,\mathrm{kV}$ 瞬时电压过大，需设计保护电路



本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. **一阶电路的零状态响应**

4. 一阶电路的全响应

5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

7. 二阶电路响应的初步分析*

7-3 一阶电路的零状态响应

- 什么是零状态响应？ $u_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$
  - 无初始储能，仅由外部激励引起的响应

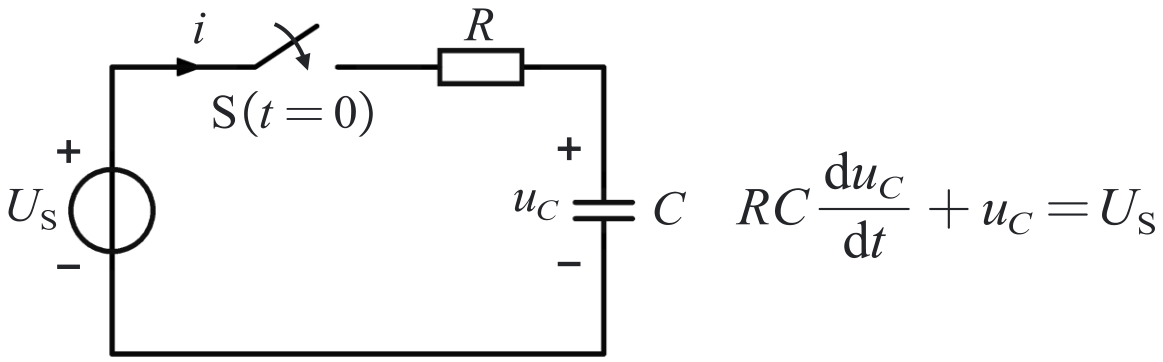
$$u_C(t)=u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

利用电容VCR公式 $i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$（关联参考向）

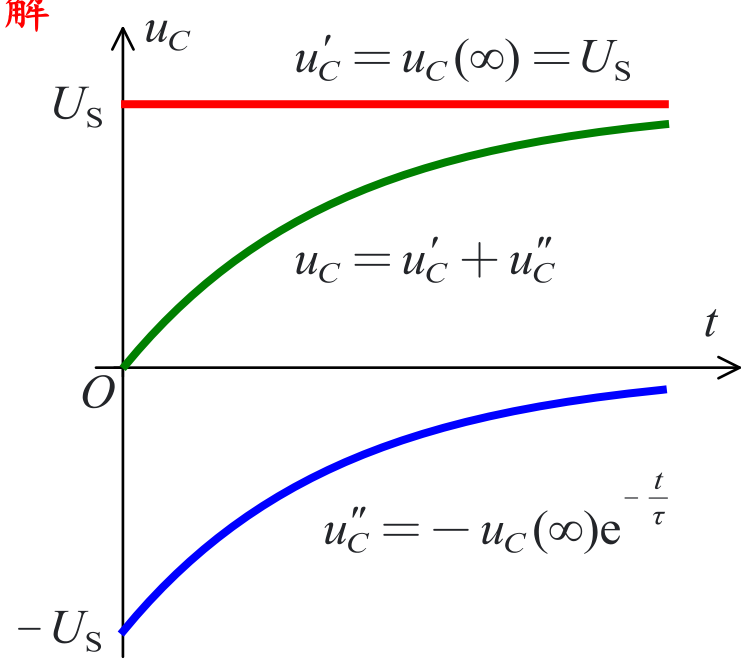
- $u_C(\infty)$ 为特解，即电路又达到稳态的解

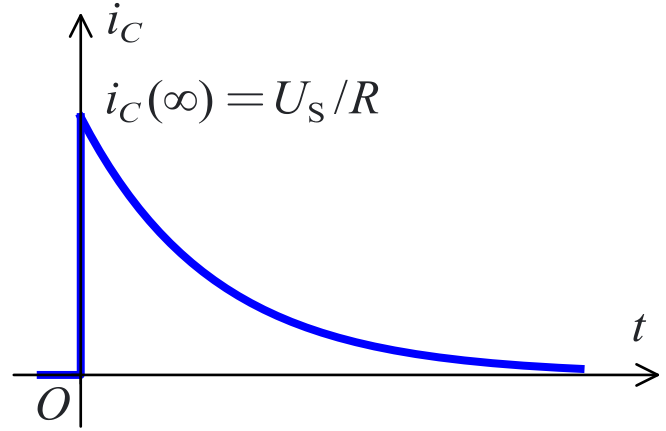
$$i_C(t)=\frac{u_C(\infty)}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

  - 关于特解与齐次方程的通解
    - 特解又称为强制分量、稳态分量
    - 通解又称为自由分量、暂态分量
    - 上述电路的特解 $u_C(\infty)=U_S$



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$





7-3 一阶电路的零状态响应

■ 电容充电过程的能量变化

▸ 电容最终的储能

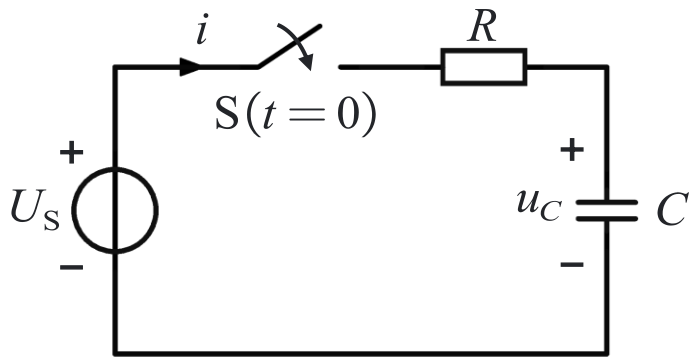
$$W_C = \int_0^\infty u_C i \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U_S^2$$

▸ 电阻消耗的能量

$$W_R = \int_0^\infty i^2 R \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U_S^2$$

▸ 电源提供的能量

$$W = \int_0^\infty U_S i \,\mathrm{d}t = C U_S^2$$



电容充电效率为多少？

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

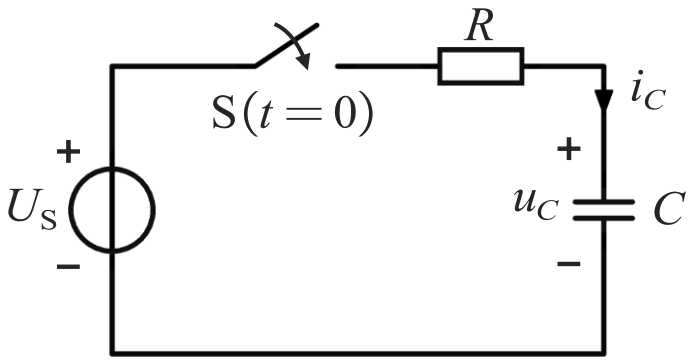
$$i_C(t) = \frac{u_C(\infty)}{R} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 充电效率只有50%，与 R 和 C 的取值无关

7-3 一阶电路的零状态响应

■ 零状态响应小结（RC vs RL）

思考：写出零状态响应需要哪些要素？



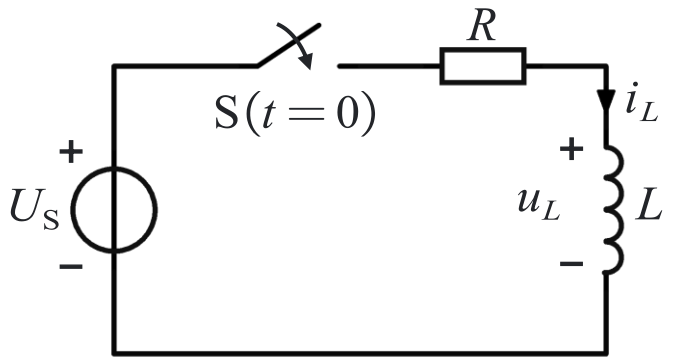
$\tau = RC$

$u_C(\infty) = U_S$

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$i_C(t)$ • 用电容 VCR 公式

$$W_C = \frac{1}{2}Cu_C^2(\infty)$$



$\tau = \frac{L}{R}$

$i_L(\infty) = \frac{U_S}{R}$

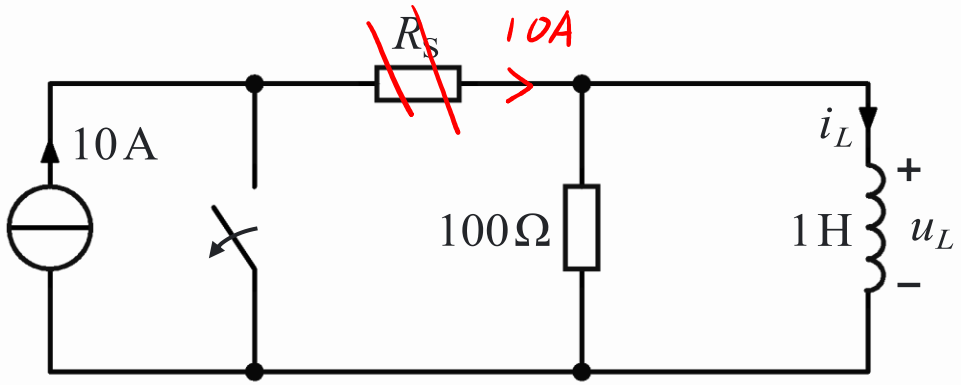
$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$u_L(t)$ • 用电感 VCR 公式

$$W_L = \frac{1}{2}Li_L^2(\infty)$$

7-3 一阶电路的零状态响应

例：若图示电路在换路前已处于稳定状态，在 $t=0$ 时开关打开，求 $t>0$ 后 i_L 和 u_L 的变化规律。



开关断开前电路处于稳态，$i_L(0_-)=0$

开关断开后，求零状态响应

电感电流的稳态解

$$i_L(\infty)=10\,A$$

电感以外部分的等效电阻为

$$R_{eq}=100\,\Omega$$

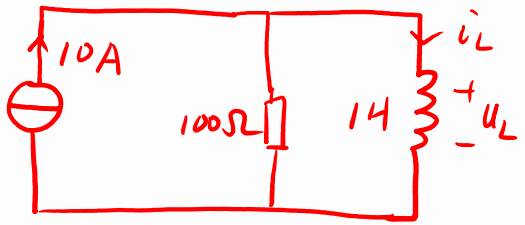
时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=0.01\,s$$

故 $i_L(t)=i_L(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

$=10(1-e^{-100t})\,A$

$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=1000e^{-100t}\,V$



本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. **一阶电路的全响应**

5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

7. 二阶电路响应的初步分析*

7-4 一阶电路的全响应

- 什么是全响应？
  - 有初始储能，同时受外部激励作用的响应
  - 经典法求解非齐次一阶微分方程

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

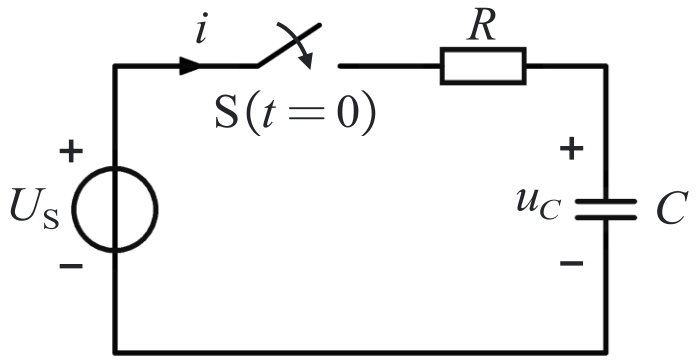
特解　　齐次方程的通解

强制分量　　自由分量

稳态分量　　暂态分量

  - 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S$$

思考：写出全响应需要哪些要素？

初值	特解	时间常数
$u_C(0_+)$	$u_C(\infty)$	τ

“三要素法”

7-4 一阶电路的全响应

- **一阶电路全响应的求解步骤（三要素法）**

① 计算初值 $f(0_+)$：根据换路定制确定 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$

② 计算特解 $f(\infty)$：换路且达到稳态后的电容开路电压 $u_C(\infty)$，电感短路电流 $i_L(\infty)$

③ 计算时间常数 τ：先求动态元件以外的等效电阻 R_{eq}，再求 $\tau = R_{\text{eq}}C$ 或者 $\tau = L/R_{\text{eq}}$

④ 根据三要素公式写出全响应：

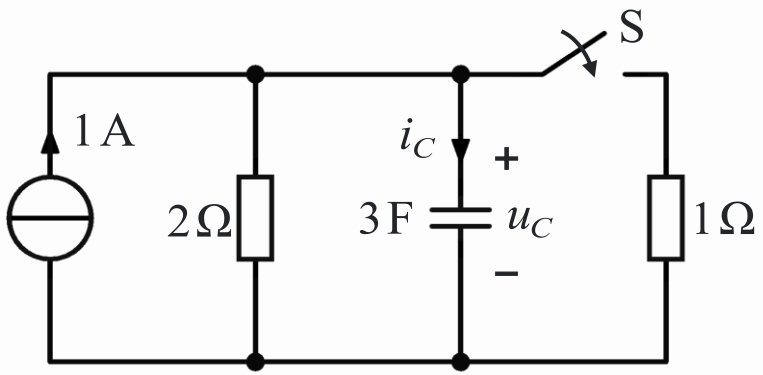
$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

⑤ 利用电容和电感的VCR公式，可继续求出 $i_C(t)$ 和 $u_L(t)$

7-4 一阶电路的全响应

例：图示电路在 $t=0$ 时开关闭合，换路前已达稳态，求换路后电容电压 $u_C(t)$和电流 $i_C(t)$。



换路前 $u_c(0_-) = (2\times 1)\,V = 2V$

换路后 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 2V$

$u_c(\infty) = (1/\!/2)\times 1\,V = \frac{2}{3}V$

$R_{eq} = (1/\!/2)\,\Omega = \frac{2}{3}\Omega$

$\tau = R_{eq}C = 2s$

代入三要素公式

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

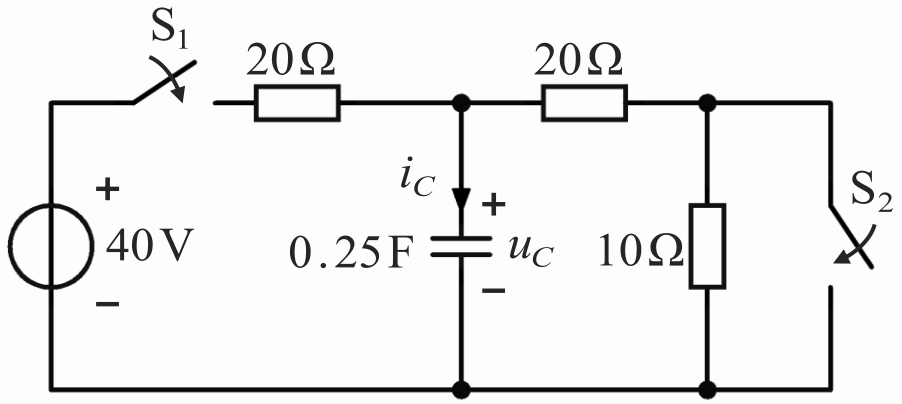
$$= (0.667 + 1.333e^{-0.5t})\,V$$

根据电容VCR公式

$$i_c(t) = C\frac{du_c}{dt} = -2e^{-0.5t}\,A$$

7-4 一阶电路的全响应

例：图示电路中，已知 $u_C(0_-)=0$。在 $t=0$ 时闭合开关 S_1，在 $t=3\,s$ 时闭合开关 S_2，求 $t>0$ 后的 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$。



由于 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$，在 $0<t<3s$ 内为零状态响应

$$u_C(\infty)=\left(\frac{10+20}{10+20+20}\times 40\right)V=24V$$

$$\tau=R_{eq}C=(30//20\times 0.25)s=3s$$

$$u_C(t)=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=24(1-e^{-\frac{1}{3}t})\,V$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=2e^{-\frac{1}{3}t}A$$

当 $t=3s$ 时

$$u_C(3)=15.17\,V$$

当 $t>3s$ 时，为全响应

$$u_C(\infty)=\left(\frac{20}{20+20}\times 40\right)V=20V$$

$$\tau=R_{eq}C=(20//20\times 0.25)s=2.5s$$

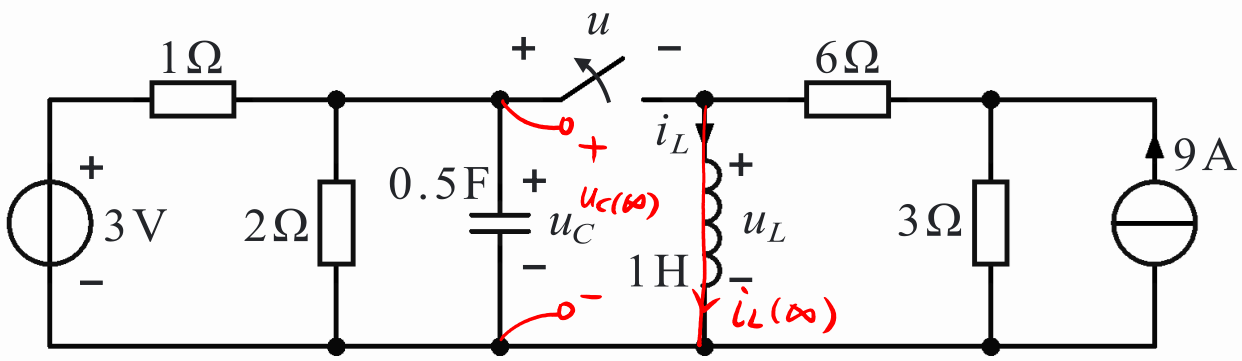
故 $u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(3)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t-3}{\tau}}$

$$=[20-4.83e^{-0.4(t-3)}]V$$

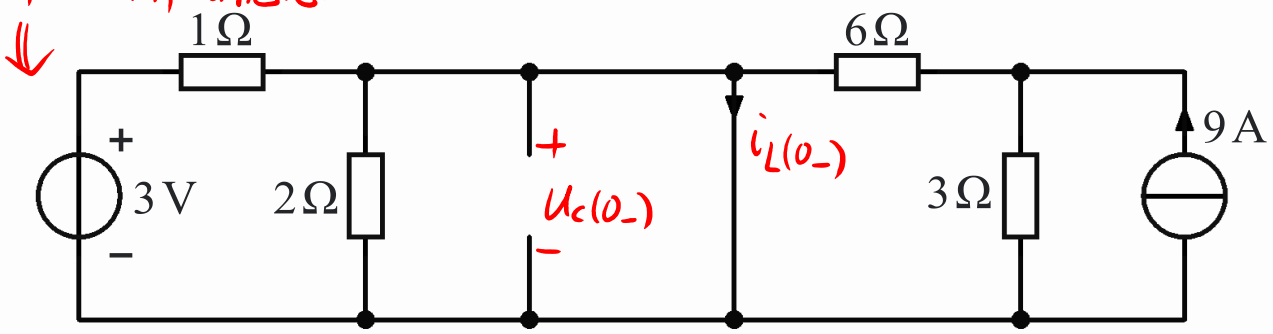
$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=0.483e^{-0.4(t-3)}A$$

7-4 一阶电路的全响应

例：图示电路在开关打开前已经到达稳态，当 $t=0$ 时开关打开，求换路后的电压 $u(t)$。



开关打开前的稳态



显然 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$

$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\left(\frac{3}{1}+\frac{3}{6+3}\times 9\right)A=6A$

$u_C(\infty)=\left(\frac{2}{1+2}\times 3\right)V=2V$

$i_L(\infty)=\left(\frac{3}{6+3}\times 9\right)A=3A$

时间常数 $\tau_1=(1/\!/2)\times 0.5\,s=\frac{1}{3}s$

$\tau_2=\frac{1}{6+3}s=\frac{1}{9}s$

故 $u_C(t)=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}})=2(1-e^{-3t})V$

$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

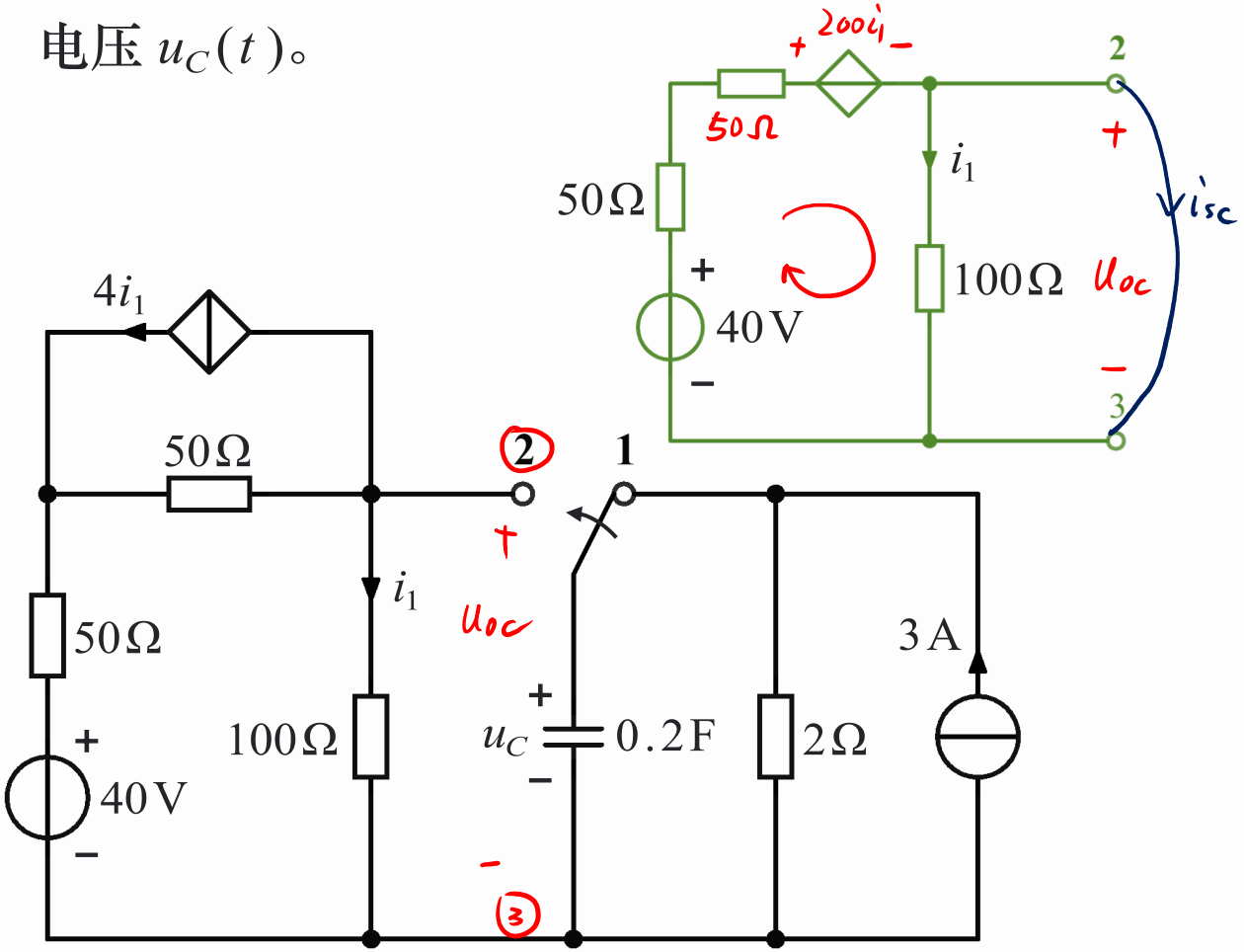
$=(3+3e^{-9t})A$

$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-27e^{-9t}V$

$u(t)=u_C(t)-u_L(t)=[2(1-e^{-3t})+2]e^{-9t}]V$

7-4 一阶电路的全响应

例：图示电路开关原来合在位置1且达到稳态。当 $t=0$ 时，开关由1合向2，求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$。



换路前 $u_C(0_-)=(2\times3)\text{V}=6\text{V}$

换路后 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$

$u_C(\infty)$ 对应②③端子的开路电压 u_{oc}

先求左侧电路的戴维南等效电路

列KVL方程 $(50+50+100)i_1+200i_1=40$

得 $i_1=0.1\text{A}$

$u_C(\infty)=u_{oc}=100i_1=10\text{V}$

连接②③端子得 $i_1=0$

故 $i_{sc}=\frac{40}{100}\text{A}=0.4\text{A}$

$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=25\Omega$

时间常数 $\tau=R_{eq}C=5\text{s}$

故 $u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$=(10-4e^{-0.2t})\text{V}$

本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. 一阶电路的全响应

5. **一阶电路的阶跃响应**

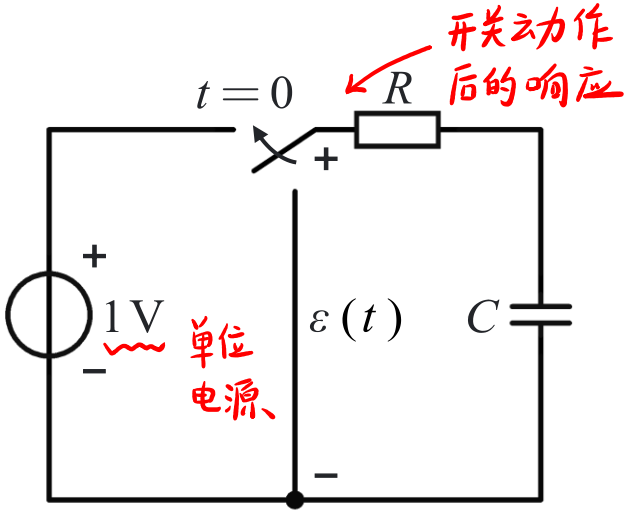
6. 一阶电路的冲激响应

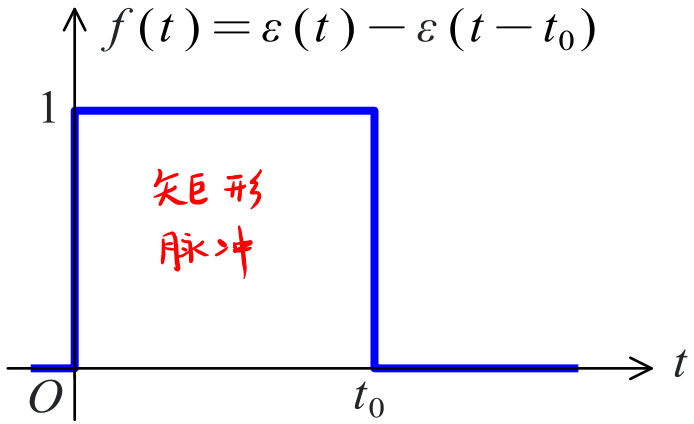
7. 二阶电路响应的初步分析*

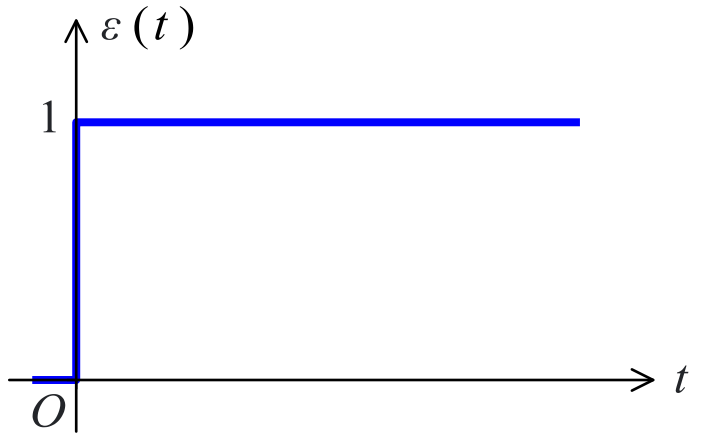
7-5 一阶电路的阶跃响应

■ 什么是阶跃响应？

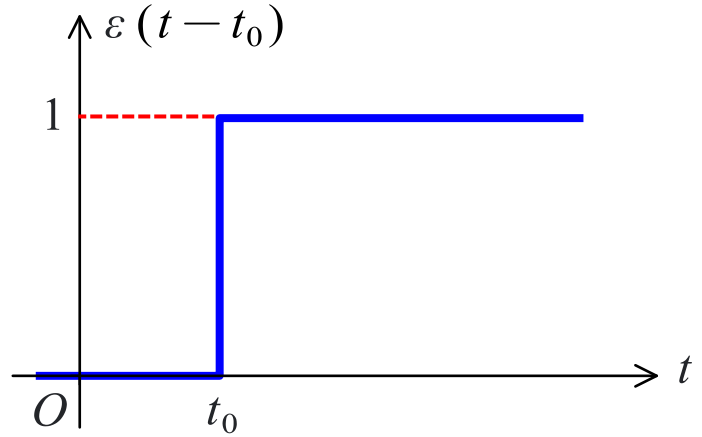
▶ 零初始状态下，以单位阶跃函数为输入产生的响应







- 单位阶跃函数 $\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$



- 延迟的单位阶跃函数 $\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$

7-5 一阶电路的阶跃响应

■ 阶跃响应的计算

▸ 阶跃响应

$$u_C(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\,\varepsilon(t)$$

≙ s(t)

▸ 任意直流激励的零状态响应

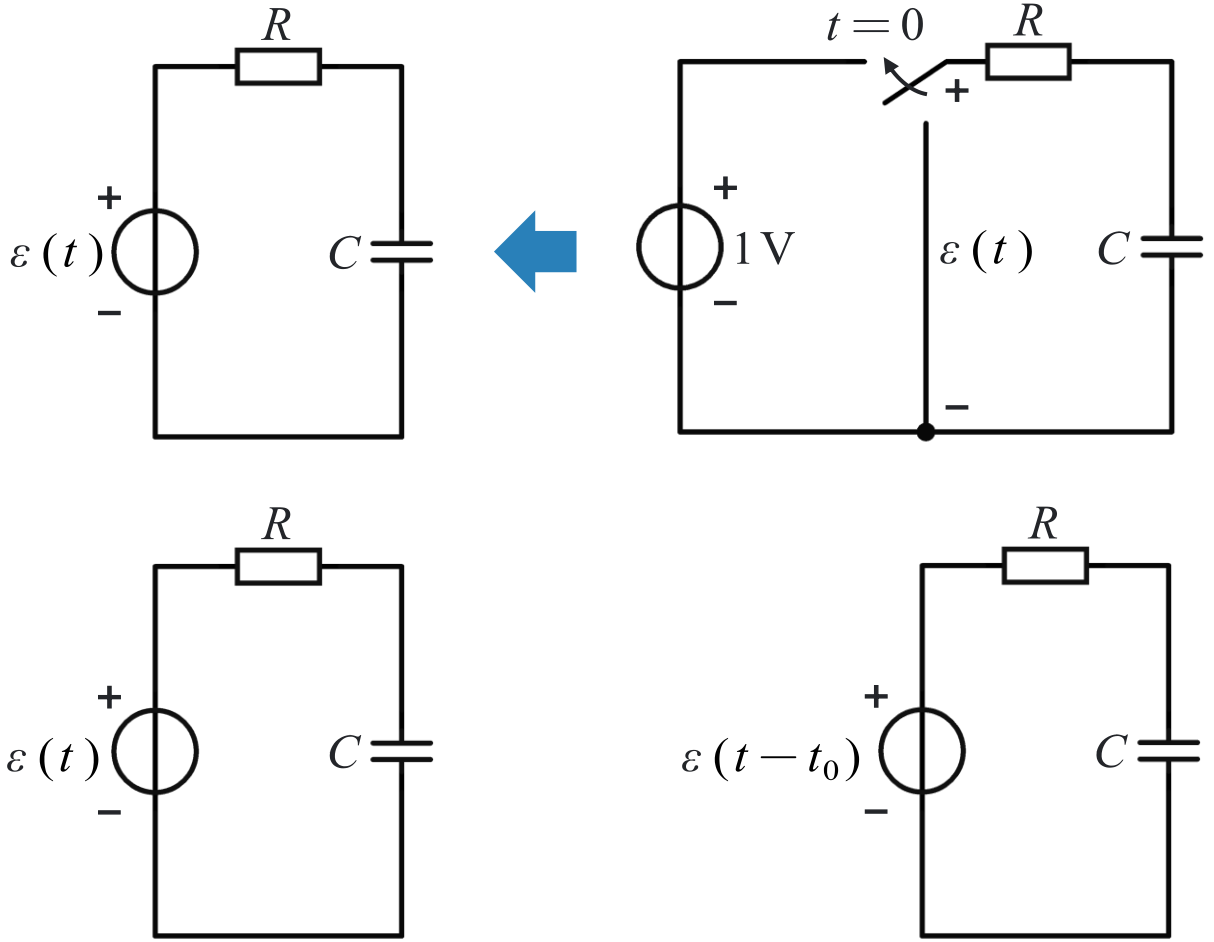
$$u_C(t)=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\,\varepsilon(t)$$

= $U_S \cdot s(t)$

▸ 延迟的阶跃响应

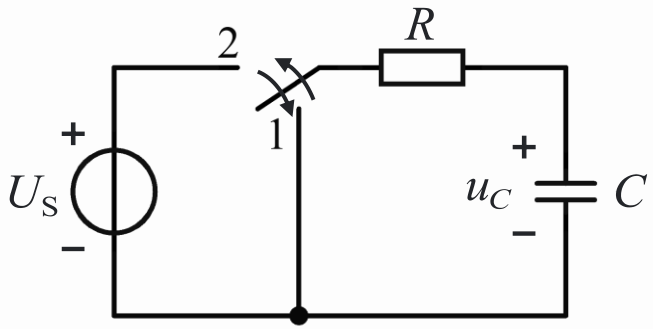
$$u_C(t-t_0)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}})\,\varepsilon(t-t_0)$$

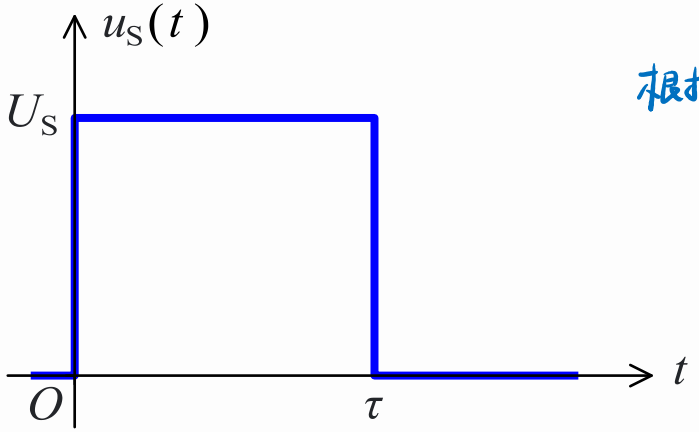
= $s(t-t_0)$



7-5 一阶电路的阶跃响应

例：图中开关合在位置 1 时电路已达稳态。当 $t=0$ 时，开关由位置1合向 2；当 $t=\tau=RC$ 时，开关又由位置 2 合向位置 1。求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$。





开关的动作产生一个正形脉冲

$$u_S(t)=U_S\varepsilon(t)-U_S\varepsilon(t-\tau)$$

对 RC 串联电路的阶跃响应为

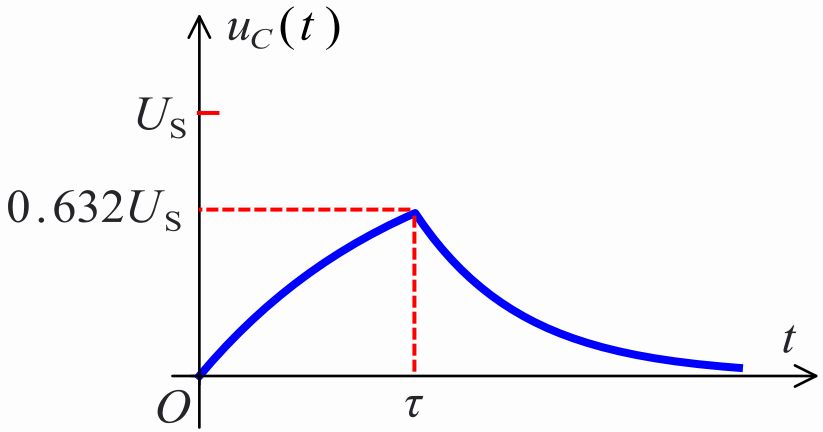
$$S(t)=(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

根据叠加定理

$$u_C(t)=\overset{U_S}{S}(t)-\overset{U_S}{S}(t-\tau)$$

$$=U_S(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

$$-U_S(1-e^{-\frac{t-\tau}{\tau}})\varepsilon(t-\tau)$$



本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. 一阶电路的全响应

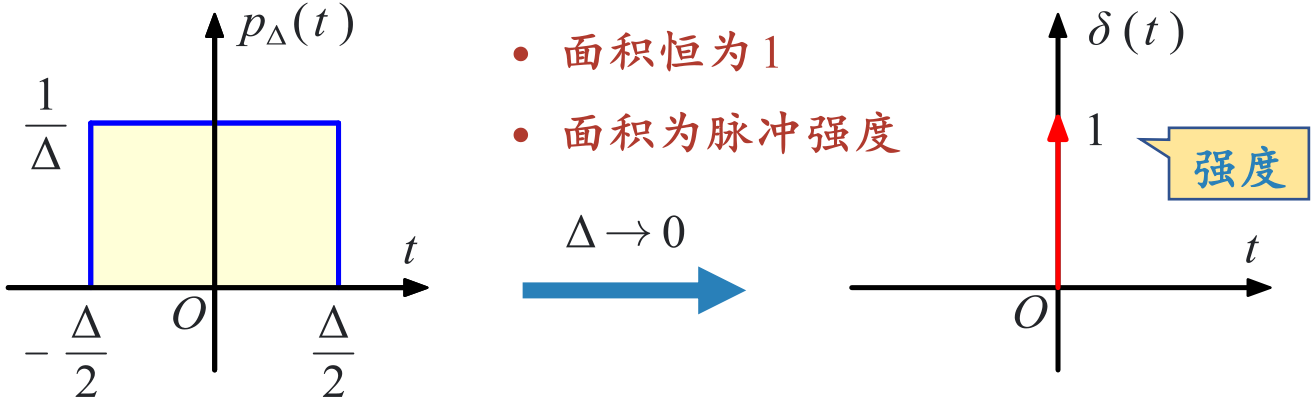
5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

7. 二阶电路响应的初步分析*

7-6 一阶电路的冲激响应

- 如何表示作用时间极短、幅值极大且效果有限的物理现象？
  - 例如：高速碰撞现象，电路电弧现象
  - 引入冲激函数——广义函数、狄拉克函数、奇异函数







  - 单位冲激函数的性质
    - 是单位阶跃函数的导数 $\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$
    - 筛分特性 $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t)$

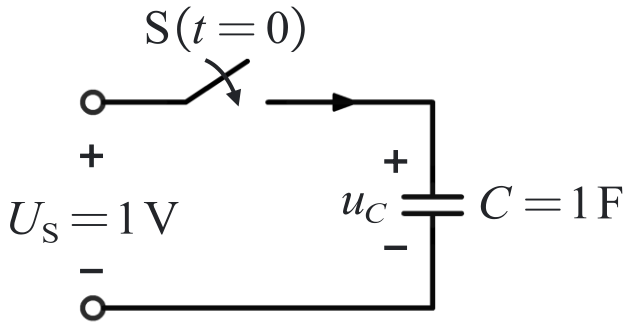
$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0,\quad t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin t\cdot\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}t=0.5$$

7-6 一阶电路的冲激响应

■ 冲激电流举例

$$u_C(0_+)=\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+}\delta_i(t)\,\mathrm{d}t=1\,\mathrm{V}$$



电容的理想瞬时充电现象

- 开关闭合的瞬间，电压使电荷瞬时转移到电容上，产生冲激电流

■ 广义换路定则

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+}i_C(t)\mathrm{d}t$$

冲激电流

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u_L(t)\mathrm{d}t$$

冲激电压

■ 什么是冲激响应？

▸ 单位冲激函数激励下产生的零状态响应

- 冲激作用的瞬间，储能元件获得初始储能
- 冲激作用结束后，激励变为0，相当于零输入响应

7-6 一阶电路的冲激响应

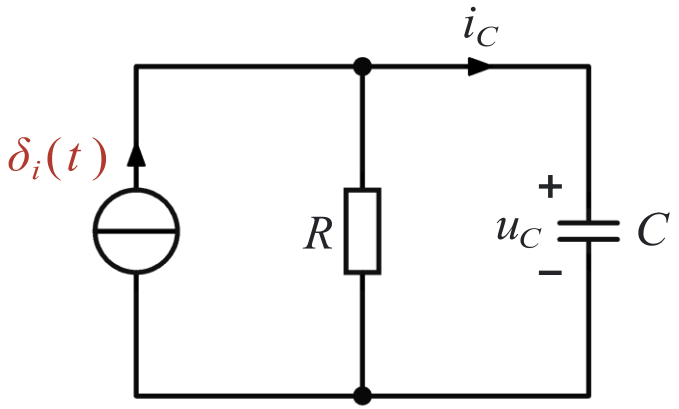
- RC 电路的冲激响应

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta_i(t)\qquad u_C(0_-)=0\,\mathrm{V}$$

$$\int_{0_-}^{0_+}C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_C}{R}\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta_i(t)\,\mathrm{d}t\qquad u_C(0_+)=\frac{1}{C}$$

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$i_c(t)=\delta(t)-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$



RC 电路的冲激响应

- RL 电路的冲激响应

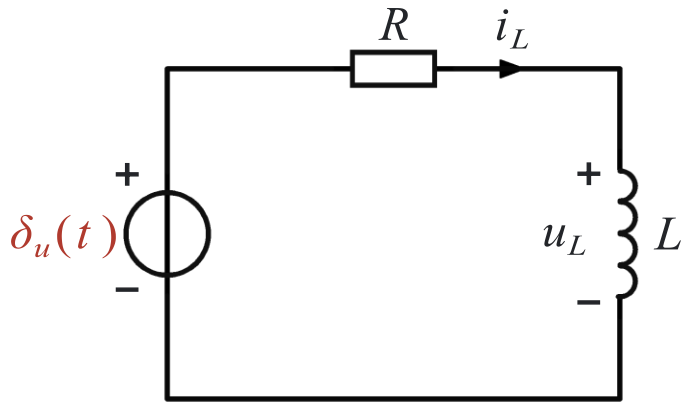
$$i_L(0_+)=\frac{1}{L}$$

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$u_L(t)=\delta(t)-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$

阶跃响应与冲激响应有何关系？

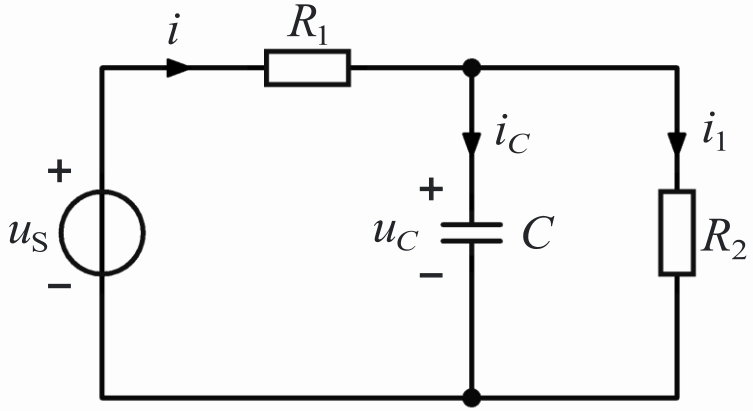
$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

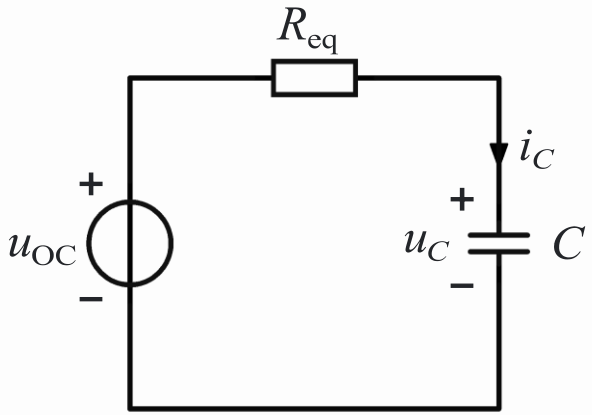


RC 电路的冲激响应

7-6 一阶电路的冲激响应

例：图示电路中，已知$u_S(t)=3\delta(t)$，$u_C(0_-)=0$，$R_1=3\text{k}\Omega$，$R_2=6\text{k}\Omega$，$C=2.5\mu\text{F}$，试求电路的冲激响应u_C和i_C。





先利用戴维南定理进行等效

$$u_{oc}=\frac{R_2}{R_1+R_2}u_S=2\delta(t) \qquad R_{eq}=R_1/\!/R_2=2\text{k}\Omega$$

等效后电路的动态方程为

$$R_{eq}C\frac{du_c}{dt}+u_c=u_{oc}$$

两端同时从0_-到0_+积分，得 $R_{eq}C(u_c(0_+)-u_c(0_-))=2$

即有 $u_c(0_+)=\frac{2}{R_{eq}\cdot C}=400\text{V}$ 时间常数 $\tau=R_{eq}\cdot C=0.005\text{s}$

故 $u_c(t)=u_c(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)=400e^{-200t}\varepsilon(t)\ \text{V}$

$$i_c(t)=C\frac{du_c}{dt}=[\delta(t)-200e^{-200t}\varepsilon(t)]\ \text{mA}$$

本章内容

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. 一阶电路的全响应

5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

7. 二阶电路响应的初步分析*

7-7 二阶电路响应的初步分析*

■ 零输入响应（以 RLC 串联电路为例）

当 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时　　$u_C=A_1\mathrm{e}^{p_1t}+A_2\mathrm{e}^{p_2t}$

当 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时　　$u_C=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{pt}$

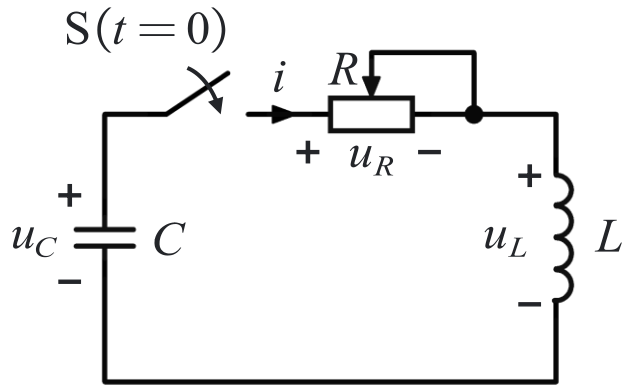
$$p_{1,2}=-\delta\pm\mathrm{j}\omega$$

当 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时　　$u_C=A_1\mathrm{e}^{p_1t}+A_2\mathrm{e}^{p_2t}=K\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)$

设初始条件：$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$，$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0+}=-\frac{i_L(0_+)}{C}=0$$

将初始条件代入三种不同情况下的解，求出系数 A_1、A_2



$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

设 $u_C=A\mathrm{e}^{pt}$ 代入

特征方程 $LCp^2+RCp+1=0$

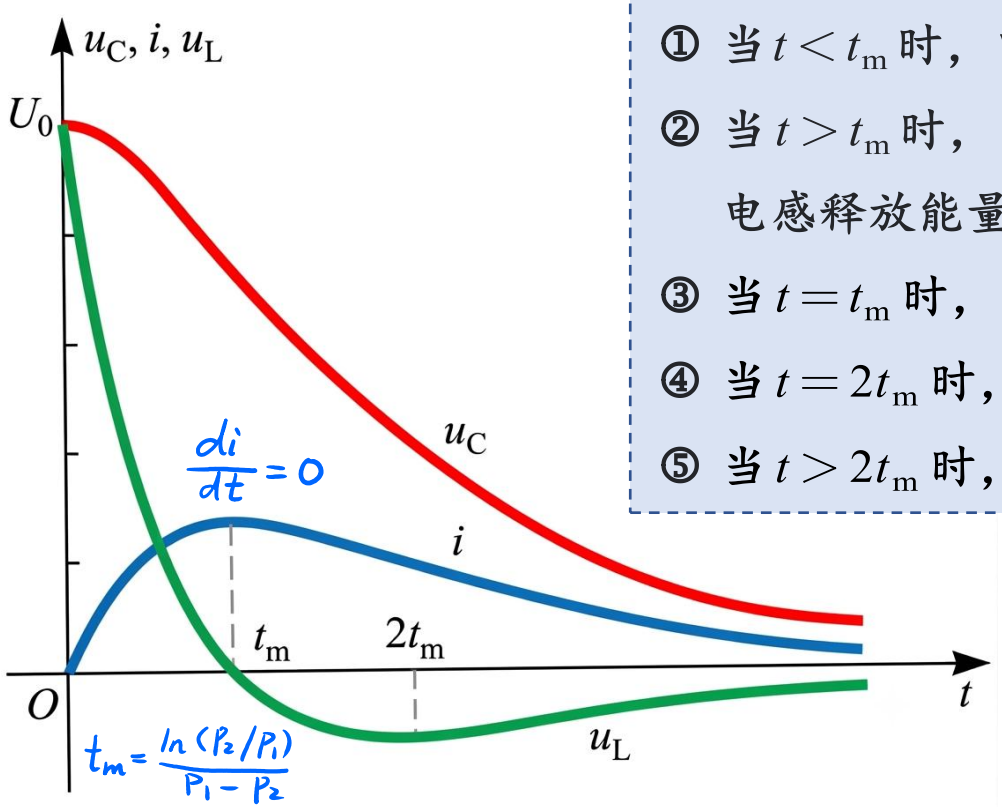
$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

7-7 二阶电路响应的初步分析*

■ **过阻尼条件：非振荡放电过程**

- 电容在整个过程中一直释放电能
- 电流先增后减，最后趋于 0

当 $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时



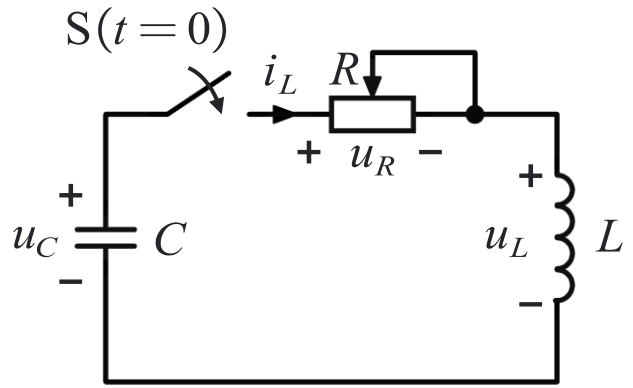
① 当 $t < t_m$ 时，电感吸收能量

② 当 $t > t_m$ 时，i 减小，$u_L < 0$，电感释放能量

③ 当 $t = t_m$ 时，电感电压为零

④ 当 $t = 2t_m$ 时，u_L 极小

⑤ 当 $t > 2t_m$ 时，u_L 衰减加快



$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

$$i = -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_L = -\frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

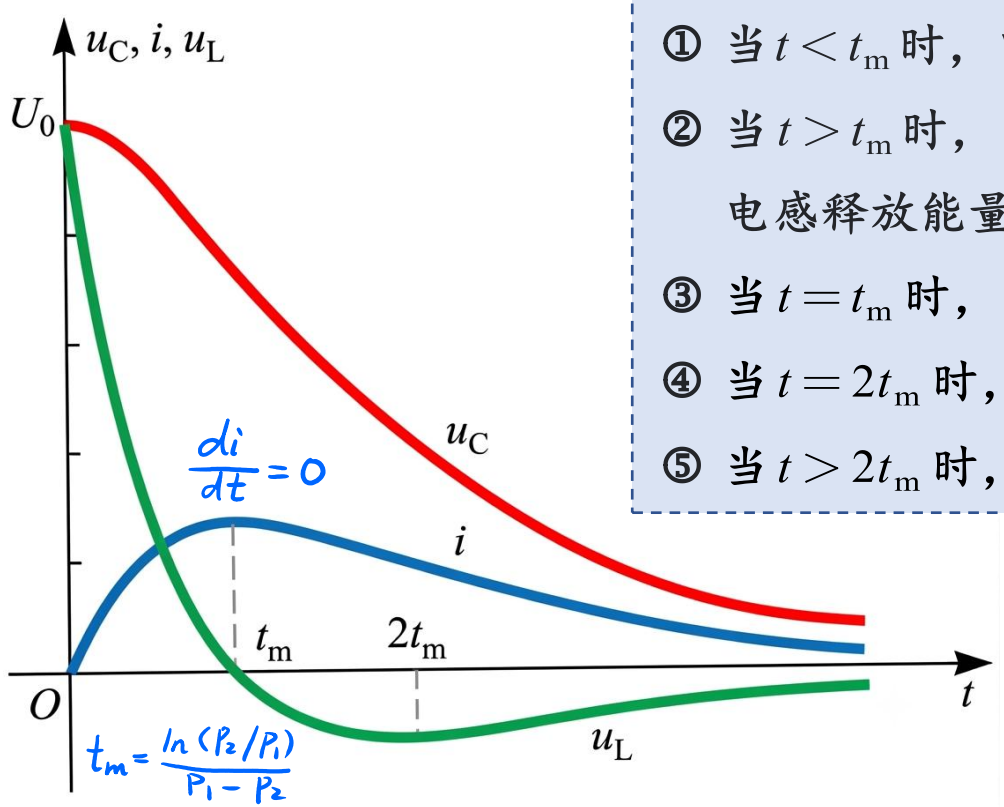
7-7 二阶电路响应的初步分析*

■ **过阻尼条件：非振荡放电过程**

▸ 电容在整个过程中一直释放电能

▸ 电流先增后减，最后趋于 0

当 $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时



① 当 $t < t_m$ 时，电感吸收能量

② 当 $t > t_m$ 时，i 减小，$u_L < 0$，电感释放能量

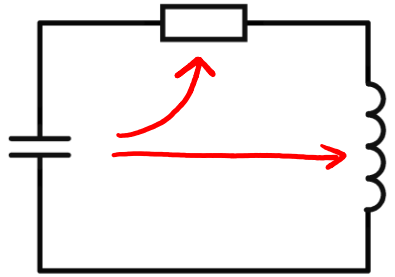
③ 当 $t = t_m$ 时，电感电压为零

④ 当 $t = 2t_m$ 时，u_L 极小

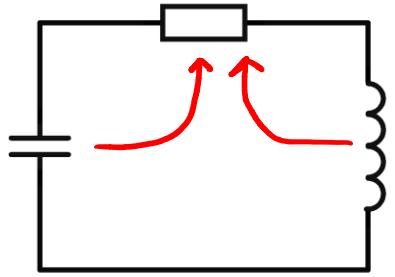
⑤ 当 $t > 2t_m$ 时，u_L 衰减加快

$W_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$　　$W_L = \frac{1}{2}Li^2$

$0 < t < t_m$



$t > t_m$

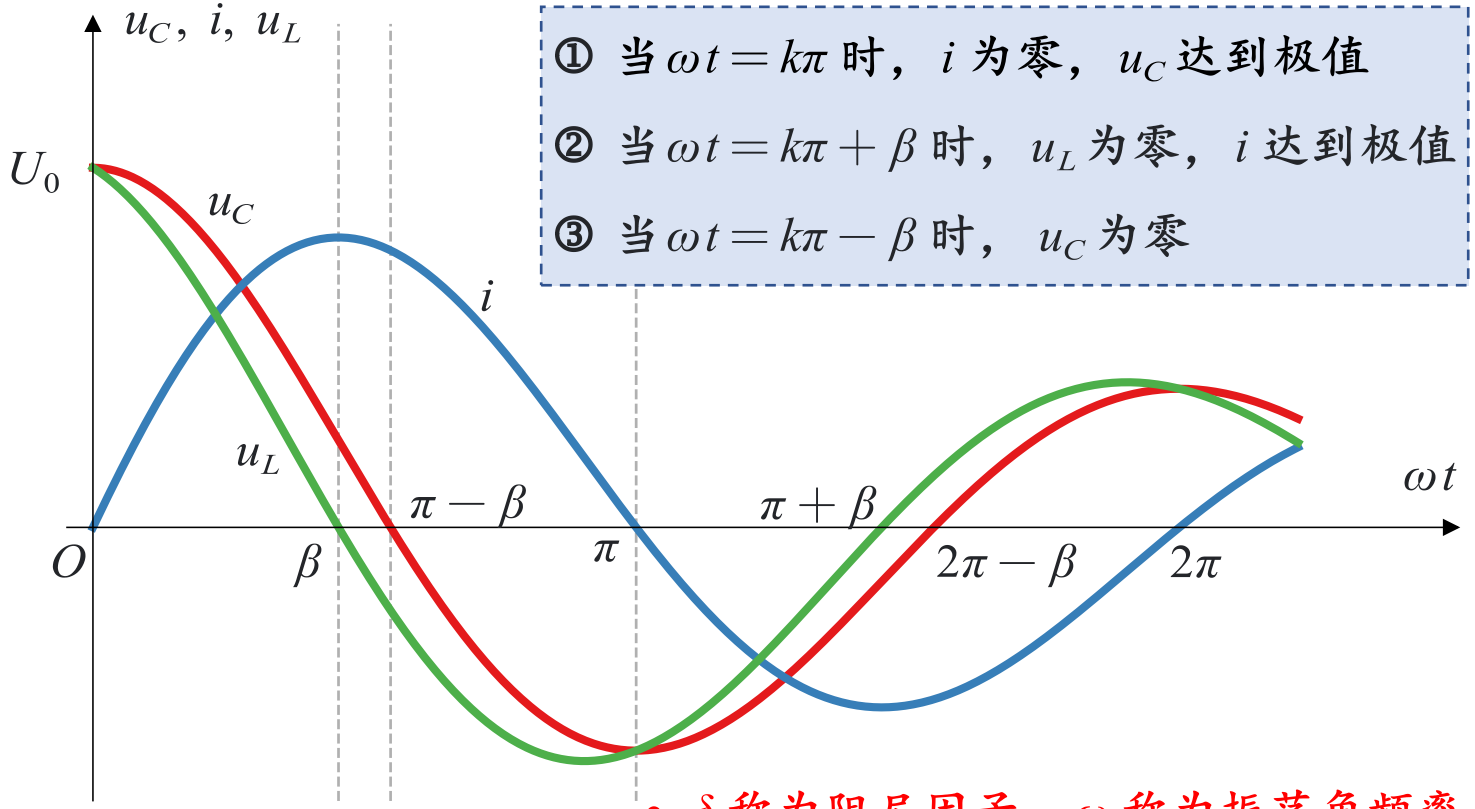


7-7 二阶电路响应的初步分析*

■ 欠阻尼条件：振荡放电过程

▸ 储能元件周期性地交换能量

当 $R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时

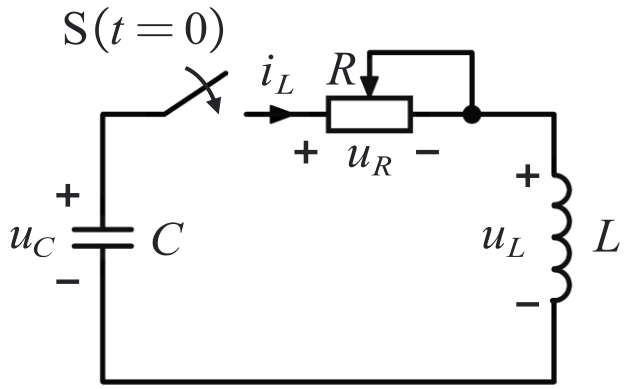


① 当 $\omega t=k\pi$ 时，i 为零，u_C 达到极值

② 当 $\omega t=k\pi+\beta$ 时，u_L 为零，i 达到极值

③ 当 $\omega t=k\pi-\beta$ 时，u_C 为零

• δ 称为阻尼因子，ω 称为振荡角频率



$$\omega_0=1/\sqrt{LC}$$

$$u_C=\frac{U_0\omega_0}{\omega}e^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)$$

$$i=\frac{U_0}{\omega L}e^{-\delta t}\sin(\omega t)$$

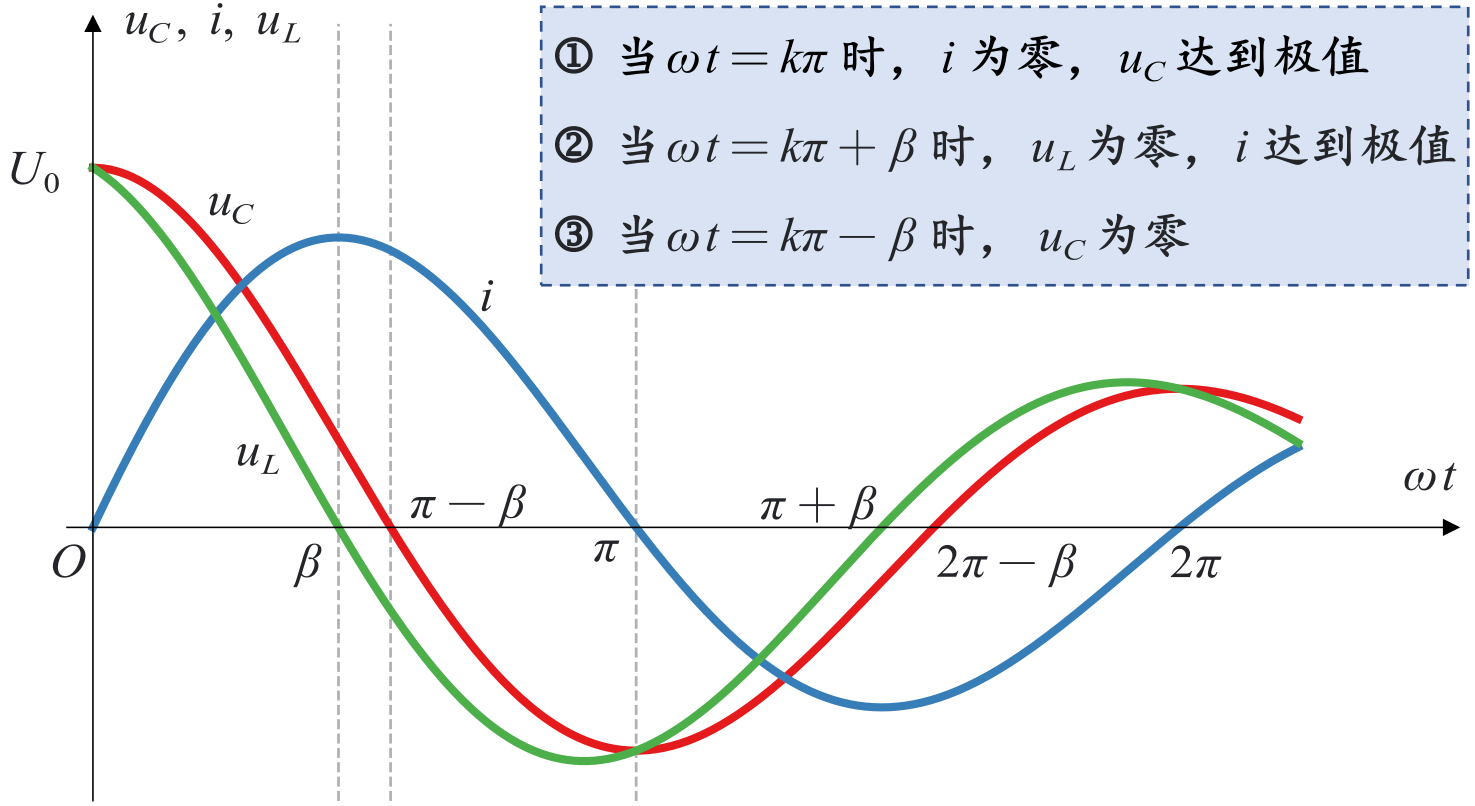
$$u_L=-\frac{U_0\omega_0}{\omega}e^{-\delta t}\sin(\omega t-\beta)$$

7-7 二阶电路响应的初步分析*

■ 欠阻尼条件：振荡放电过程

▸ 储能元件周期性地交换能量

当 $R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时



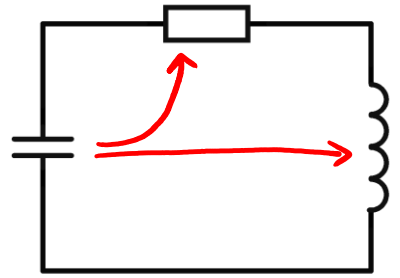
① 当 $\omega t=k\pi$ 时，i 为零，u_C 达到极值

② 当 $\omega t=k\pi+\beta$ 时，u_L 为零，i 达到极值

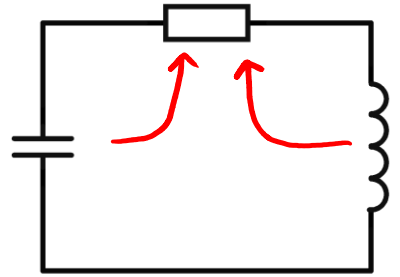
③ 当 $\omega t=k\pi-\beta$ 时，u_C 为零

$W_C=\frac{1}{2}Cu_C^2$　　$W_L=\frac{1}{2}Li^2$

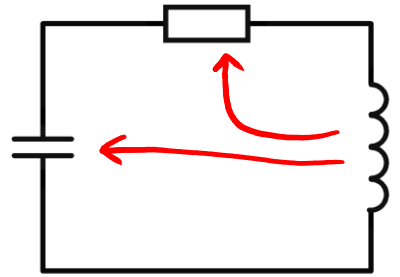
$0<\omega t<\beta$



$\beta<\omega t<\pi-\beta$



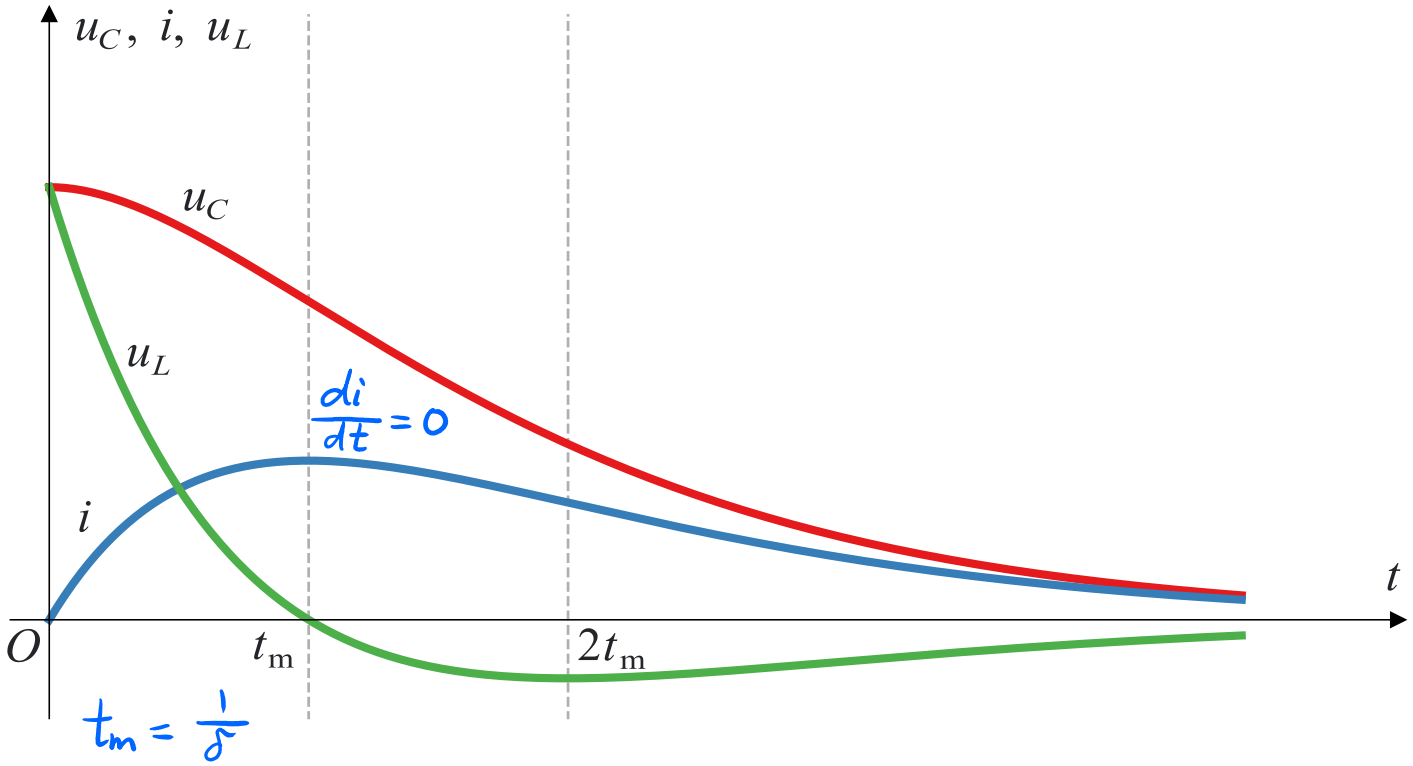
$\pi-\beta<\omega t<\pi$

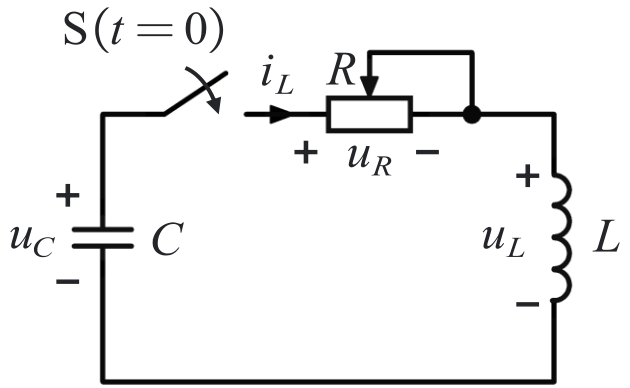


7-7 二阶电路响应的初步分析*

- **临界阻尼条件：振荡与非振荡分界**
  - 响应曲线类似于过阻尼放电过程
  - 具有非振荡特性

当 $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时





$$\delta=\frac{R}{2L}$$

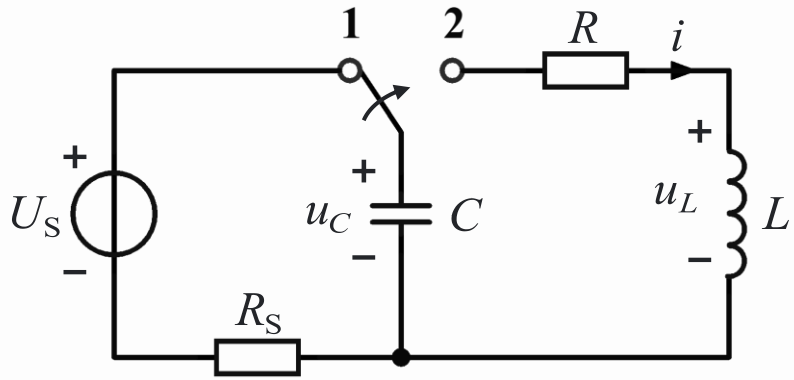
$$u_C(t)=U_0(1+\delta t)\mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$i(t)=\frac{U_0}{L}t\,\mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$u_L(t)=U_0\mathrm{e}^{-\delta t}(1-\delta t)$$

7-7 二阶电路响应的初步分析*

例：已知 $U_S=5\text{V}$，$C=1\mu\text{F}$，$R=2\text{k}\Omega$，$L=1\text{H}$，开关S原来闭合在触点1处，且已达稳态，在 $t=0$ 时，开关S由触点1接到触点2。求：u_C、i、u_L 和 $i_{\max}$。



根据电路图及换路条件

$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_S=5V$　　$i(0_+)=i(0_-)=0$

又因为 $2\sqrt{\frac{L}{C}}=2k\Omega=R$

开关合到触点2后为RLC串联，且满足临界阻尼条件

得 $P_1=P_2=-\frac{R}{2L}=-1000$，即 $\delta=1000$

将初始条件和特征值代入通解 $u_C=(A_1+A_2t)e^{-\delta t}$ 得 $A_1=5$，$A_2=5000$

故 $u_C(t)=(5+5000t)e^{-1000t}V$

$i=-C\frac{du_C}{dt}=5te^{-1000t}A$

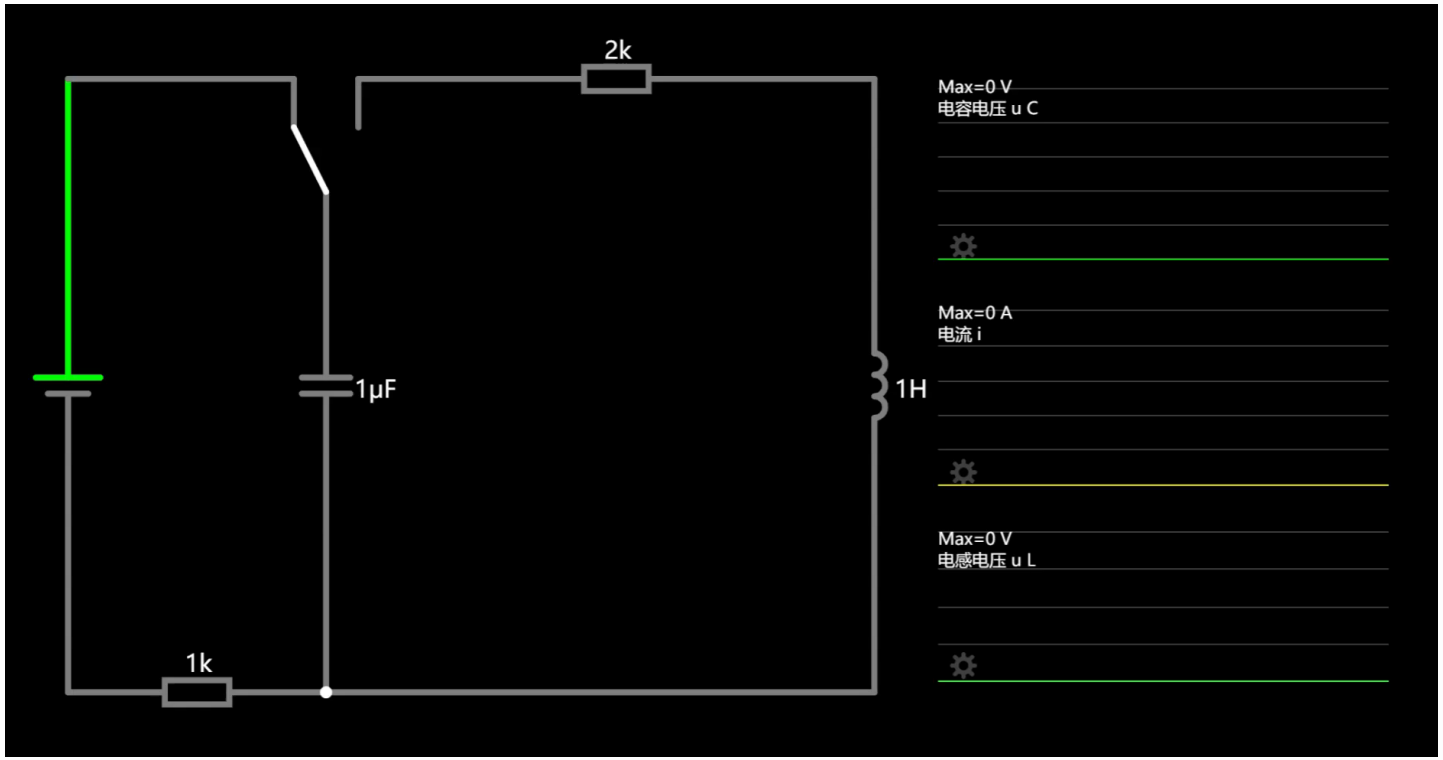
$u_L=L\frac{di}{dt}=(5-5000t)e^{-1000t}V$

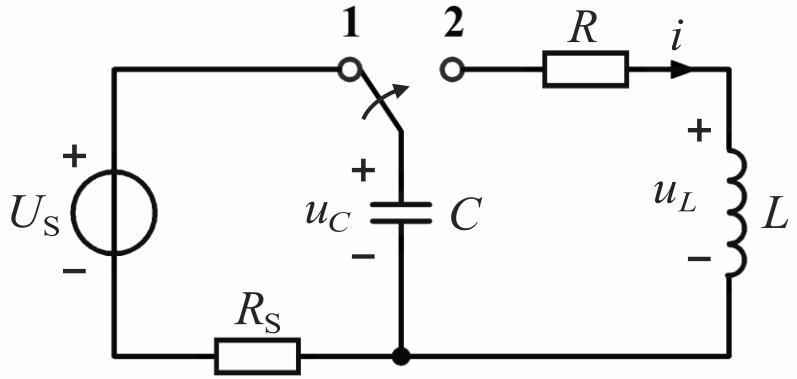
由 $\frac{di}{dt}=0$ 得 $t_m=\frac{1}{\delta}=1ms$

故 $i_{max}=i(t_m)=1.84mA$

7-7 二阶电路响应的初步分析*

例：已知 $U_S=5\,\mathrm{V}$，$C=1\,\mu\mathrm{F}$，$R=2\,\mathrm{k}\Omega$，$L=1\,\mathrm{H}$，开关S原来闭合在触点1处，且已达稳态，在 $t=0$ 时，开关S由触点1接到触点2。求：u_C、i、u_L 和 $i_{\max}$。





$u_C(0_+)=5\,\mathrm{V}$

$u_C(t)=(5+5000t)e^{-1000t}\,\mathrm{V}$

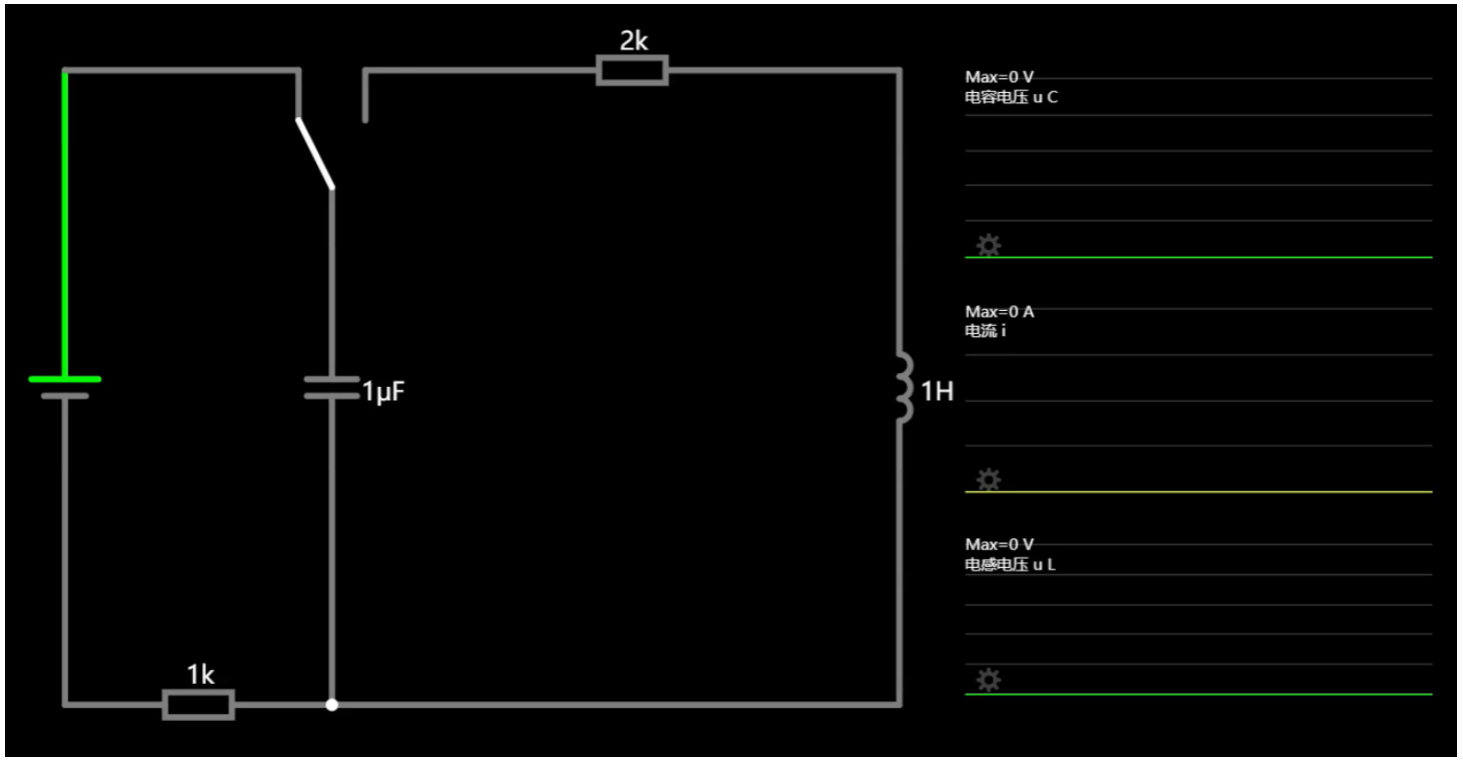
$i=5te^{-1000t}\,\mathrm{A}$

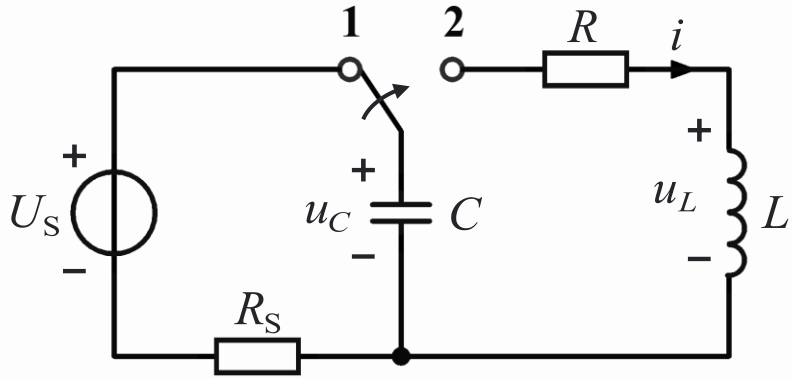
$u_L(t)=(5-5000t)e^{-1000t}\,\mathrm{V}$

$i_{max}=1.84\,\mathrm{mA}$

7-7 二阶电路响应的初步分析*

例：已知 $U_S=5\,\mathrm{V}$，$C=1\,\mu\mathrm{F}$，$R=2\,\mathrm{k\Omega}$，$L=1\,\mathrm{H}$，开关S原来闭合在触点1处，且已达稳态，在 $t=0$ 时，开关S由触点1接到触点2。求：u_C、i、u_L 和 $i_{\max}$。





若将电阻R设为100Ω会怎样？

$R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$

欠阻尼，振荡放电

本章小结

1. 动态电路的方程及其初始条件

2. 一阶电路的零输入响应

3. 一阶电路的零状态响应

4. 一阶电路的全响应

5. 一阶电路的阶跃响应

6. 一阶电路的冲激响应

7. 二阶电路响应的初步分析*